# PROPRIÉTÉS MATHÉMATIQUES DE MODÈLES GÉOPHYSIQUES POUR L'ABSORPTION DES ONDES. APPLICATION AUX CONDITIONS DE BORDS ABSORBANTS.

**Mathieu FONTES**

# Table des matières

# Introduction

Les problèmes de propagation d'ondes sont généralement posés en domaine non borné, ou du moins très grand, par rapport à la zone d'étude. Afin de les étudier numériquement, il peut être nécessaire de limiter artificiellement le domaine de calcul, la nécessité provenant du choix qui a été fait pour la méthode numérique. Ainsi, on se contente de déterminer les champs dans une région bornée, choisie en fonction du support des données. C'est une démarche intéressante puisque l'on peut alors appliquer dans cette région des méthodes numériques efficaces telles que des méthodes d'éléments finis. Cependant, la frontière non physique du domaine ne doit pas parasiter les calculs en générant des réflexions à l'intérieur. Depuis le début des années 70, cette question est au centre de nombreux travaux, et même si des progrès considérables ont été réalisés durant les dix dernières années, beaucoup de questions restent à traiter, aussi bien du point de vue théorique que du point de vue numérique. Afin de se ramener à un problème posé en milieu borné, deux approches peuvent être privilégiées : appliquer des conditions aux limites absorbantes ou bien utiliser des méthodes de couches absorbantes.

La première méthode consiste à imposer des conditions aux limites sur une frontière artificielle qui limite le domaine de calcul. L'idéal serait que ces conditions n'engendrent pas de réflexion sur la frontière fictive. Dans ce cas, la condition aux limites que l'on impose est appelée condition aux limites transparente (CLT). Cette condition est généralement globale en temps et en espace, ce qui la rend difficile à mettre en œuvre numériquement (la durée des calculs et le stockage en mémoire peuvent être très élevés, voire prohibitifs). C'est pour cette raison, qu'en pratique, on choisit d'approcher cette condition par des conditions aux limites locales en temps et en espace : on parle de conditions aux limites artificielles ou absorbantes (CLA). Ces conditions s'expriment comme des équations aux dérivées partielles posées sur la frontière artificielle et sont censées minimiser les réflexions parasites que la frontière artificielle engendre. Les premiers travaux ont été menés par Engquist et Majda [52], [53] pour des problèmes de propagation d'ondes. Leur méthode permet, dans un premier temps, de construire la CLT, puis, l'opérateur obtenu n'étant pas local (il s'agit d'un opérateur pseudo-différentiel), ils approchent la CLT par un opérateur différentiel, et donc local. Plusieurs approximations ont été proposées, elles conduisent à différentes conditions aux limites. Engquist et Majda définissent un ordre qui permet de classifier ces conditions absorbantes. La précision des CLA (que l'on peut mesurer à l'aide d'une analyse par ondes planes) augmente avec cet ordre ainsi qu'avec celui des opérateurs différentiels sur la frontière. Il faut donc trouver un équilibre entre le coût numérique et la précision des calculs. De plus, l'efficacité des conditions aux limites absorbantes dépend de la fréquence et de l'incidence de l'onde qui atteint la frontière artificielle, quel que soit l'ordre de la condition. Par ailleurs, il faut noter que l'utilisation de conditions d'ordre élevé peut conduire à certaines instabilités [70]. On constate donc que si les méthodes de CLA sont très convaincantes, leur efficacité dépend d'un grand nombre de paramètres qui sont difficiles à ajuster simultanément. Depuis les travaux initiaux d'Engquist et Majda, les méthodes de conditions absorbantes ont été largement étudiées pour différents systèmes d'équations ; des améliorations, telles que le traitement des coins ou la prise en compte de bords courbes, ont aussi été apportées. Pour les ondes électromagnétiques, solutions des équations de Maxwell (cadre de notre travail), on peut citer notamment [16], [75], [119], [56]. Pour une présentation exhaustive des conditions aux limites absorbantes, nous renvoyons à [65] et [68].

Une seconde technique pour limiter le domaine de calcul consiste à utiliser des couches absorbantes. On entoure ce domaine d'un milieu fictif, la couche absorbante, dans lequel l'onde est atténuée (absorbée) et on ne se préoccupe plus de la condition aux limites à imposer en fin de couche. Les premiers modèles ont été introduits au début des années 70. Ils étaient simples et reposaient sur l'introduction dans ces couches d'un modèle physique contenant un coefficient d'absorption constant. Bien que plus simples à mettre en œuvre que les conditions aux limites absorbantes, ces premiers modèles de couches ont été peu utilisés car ils ont un inconvénient majeur : l'onde incidente voit un changement brutal entre le milieu de propagation et la couche, ce qui entraîne des réflexions parasites. Ainsi, au cours des années 80, les méthodes de couches ont été délaissées au profit des conditions aux limites absorbantes. En 1994, Bérenger [17] a introduit un nouveau concept de couches absorbantes pour les ondes électromagnétiques : les couches absorbantes parfaitement adaptées ou PML pour la terminologie anglaise *Perfectly Matched Layers*. L'originalité de son modèle est de ne générer aucune réflexion parasite entre le milieu physique et la couche PML, quels que soient l'angle d'incidence et la fréquence de l'onde propagée. Les travaux de Bérenger ont suscité beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique. Ils ont, d'une part, effacé l'inconvénient des modèles de couches classiques et, d'autre part, corrigé le principal défaut des conditions aux limites absorbantes, dont l'efficacité n'est avérée qu'à incidence proche de la normale, pour des fréquences élevées. La méthode des PML est simple à mettre en œuvre numériquement car on intègre facilement le modèle dans un code de calcul existant et comprenant les équations initiales. Par ailleurs, cette technique s'applique à un grand nombre de systèmes d'équations issus de la physique, ce qui a conduit à une quantité de publications ces dix dernières années (voir [74] pour une vue d'ensemble des résultats obtenus). Dans le cadre de notre travail, on peut citer, entre autres, [115], [2], [42], [21] pour les équations de Maxwell et [113], [43], [20], [85] pour les équations de l'élastodynamique. Pour d'autres types d'équations, on peut également citer [72], [44], [128], [24], [73]...

Le développement d'un modèle PML peut être vu comme le plongement des équations initiales à l'intérieur du milieu fictif avec passage continu du domaine réel au domaine artificiel. Comme l'ont montré Collino et Tsogka [43], la démarche originelle de Bérenger [17] se généralise à un système hyperbolique du premier ordre :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i} \mathbf{U} = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 & (1) \\ \mathbf{U}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{U_0}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; & (2) \end{cases}$$

où $\mathbf{U}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ ; $A_1, \ldots, A_n, B$ des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\mathbf{U_0}(\boldsymbol{x}) = 0$ pour $x_1 < 0$. Pour construire le modèle PML dans la direction $x_1$, on introduit, d'une part, une fonction d'amortissement $\sigma$, dépendant uniquement de $x_1$ :

$$\sigma = \sigma(x_1) \geq 0, \quad \sigma(x_1) = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 < 0 \,;$$

d'autre part, on décompose $\mathbf{U}$ sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2 \ ;$$

on considère alors le système :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}^1 + \sigma \mathbf{U}^1 + A_1 \partial_{x_1}(\mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2) = 0, \\ \\ \partial_t \mathbf{U}^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} A_i \partial_{x_i}(\mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On impose par ailleurs la condition de raccord sur la frontière artificielle $\{x_1 = 0\}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2 \quad \text{en} \quad x_1 = 0.$$

En passant en fréquence, le système (3) s'écrit :

$$\begin{cases} i\omega \mathbf{U}^1 + \sigma \mathbf{U}^1 + A_1 \partial_{x_1}(\mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2) = 0, \\ \\ i\omega \mathbf{U}^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} A_i \partial_{x_i}(\mathbf{U}^1 + \mathbf{U}^2) = 0; \end{cases} \tag{4}$$

ou encore :

$$\begin{cases} i\omega \mathbf{U}^1 + \dfrac{i\omega}{i\omega + \sigma} A_1 \partial_{x_1} \mathbf{U} = 0, \\ \\ i\omega \mathbf{U}^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} A_i \partial_{x_i} \mathbf{U} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ainsi, le système (3) est obtenu à partir du problème (1) en changeant $\partial_{x_1}$ en :

$$\partial_{\tilde{x_1}} = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma} \partial_{x_1},$$

ce qui revient à effectuer le changement de variable :

$$\tilde{x_1} = x_1 - \frac{i}{\omega} \int_0^{x_1} \sigma(s)\, ds.$$

Grâce à une analyse par ondes planes, on démontre alors (voir [43]) que le système (3) est un modèle PML dans la direction $x_1$ : d'une part, ce modèle ne génère aucune réflexion à l'interface $\{x_1 = 0\}$ et d'autre part, l'onde transmise décroît exponentiellement dans la couche $\{x_1 > 0\}$.

Mathématiquement, le modèle PML (3) est une perturbation d'ordre zéro d'une version décomposée (*splittée*) de l'équation (1). Abarbanel et Gottlieb [1] ont observé que le modèle introduit par Bérenger pour les équations de Maxwell est une perturbation d'un système faiblement hyperbolique. Cette remarque est valable plus généralement pour tous les modèles PML de la forme (3). Cependant, ces modèles ont été utilisés sans poser de problème d'un point de vue numérique. Cela provient du fait que la perturbation d'ordre zéro présente dans le système PML ne conduit pas à un problème mal posé. Ce résultat a été démontré dans [21] pour le modèle PML introduit par Bérenger. Il a ensuite été étendu (sous certaines hypothèses) dans [20] au cadre plus général d'un système PML du type (3). Plusieurs auteurs [115], [135], [2], [108], [113] ont ensuite développé des modèles PML non *splittés*. L'idée consiste à reformuler le modèle PML en introduisant des inconnues auxiliaires plutôt que de décomposer les champs. Le nouveau modèle PML apparaît alors comme la perturbation d'un système fortement hyperbolique.

L'analyse mathématique des modèles PML demeure une question délicate. En particulier, parmi tous les travaux sur le sujet, on peut remarquer que très peu s'intéressent au caractère bien posé des modèles. Pour le système des équations de Maxwell, nous citerons [1], [103], [113], [21] et [98] qui sont, à notre connaissance, les seuls à avoir considéré cette question. De plus, parmi ces travaux, seuls [103], [113], et [98] traitent le cas où le coefficient d'amortissement $\sigma$ est variable, alors que, comme nous le verrons plus loin, une telle variation est nécessaire pour la mise en œuvre numérique. Analyser le caractère bien posé de ces modèles est une étape importante puisqu'elle fournit des estimations *a priori* qui peuvent aider à prévoir d'éventuelles instabilités numériques. Une autre notion importante est celle de la stabilité en temps long de la solution. Celle-ci permet d'analyser le comportement en temps long des solutions. Dans [3] et [23] sont décrits des phénomènes de croissance linéaire en temps qu'il faut absolument éliminer pour garantir une bonne stabilité du schéma numérique. Notons que le caractère bien posé et la stabilité sont des notions indépendantes l'une de l'autre. Dans [21] et [74], les auteurs insistent sur cette distinction : le caractère bien posé d'un problème n'exclut pas des solutions exponentiellement croissantes en temps. Un modèle PML pour lequel existeraient de telles solutions n'est pas convenable d'un point de vue numérique. C'est pour cela que l'on s'intéresse à la stabilité, qui exprime le fait que la solution du problème peut être contrôlée en temps long. Dans le cas d'un modèle PML (3), l'analyse de la stabilité a été menée dans [20], toujours dans le cas d'un coefficient d'absorption constant.

**Description et plan du travail.** Ce travail est consacré à l'étude mathématique de modèles qui interviennent en géophysique. Plus précisément, nous nous intéressons à l'analyse de modèles faisant intervenir des PML et/ou des CLA pour les équations de Maxwell d'une part et de l'élastodynamique d'autre part. Un des objectifs de ce travail est d'explorer quelques pistes qui, moyennant quelques adaptations, pourraient être utilisées pour développer une analyse des modèles PML incluant le comportement en temps long de la solution. Le point de départ de ce sujet est un article d'Abarbanel et Gottlieb [2] qui présente un modèle PML pour les équations de Maxwell bidimensionnelles. C'est un modèle non *splitté* qui ressemble à un système de Maxwell posé dans un matériau diélectrique dont la loi constitutive se simplifie grâce à l'introduction d'inconnues auxiliaires. Ce modèle se prête aisément à une analyse mathématique donnant l'existence et l'unicité de la solution dans le cadre de la théorie de Hille-Yosida. On peut ainsi espérer obtenir des informations sur l'énergie de la solution en temps long. Étant plus particulièrement intéressés par le cas tridimensionnel, nous avons d'abord étudié un modèle absorbant du type de ceux considérés dans [8]. Le plan de ce manuscrit est le suivant.

Dans les chapitres 1 et 2, nous donnons un certain nombre d'éléments qui sont utiles dans la suite. Le chapitre 1 introduit le cadre fonctionnel ainsi que les résultats mathématiques que nous utilisons tout au long du manuscrit. Le chapitre 2 présente les équations de Maxwell et certaines notions de physique qui interviennent plus loin.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons aux équations de Maxwell posées dans un milieu absorbant semi-infini. Tout d'abord, nous donnons une description rapide de ce type de milieu. Ensuite, nous étudions les propriétés mathématiques du modèle considéré. Nous montrons que le problème admet une unique solution dans un cadre hilbertien puis nous développons des conditions aux limites absorbantes bien adaptées à ce modèle.

Le chapitre 4 étudie l'effet du couplage du modèle présenté au chapitre 3 avec la condition de Silver-Müller. Nous travaillons ici dans un domaine borné ; le contexte est donc différent de celui du chapitre 3. Nous établissons, d'une part, l'existence et l'unicité de la solution et, d'autre part, des résultats de stabilité en temps long. Nous montrons notamment un résultat de stabilité exponentielle pour une énergie associée au modèle.

Dans le chapitre 5, nous présentons un modèle PML pour le système des équations de Maxwell en trois dimensions. Il est obtenu à partir du système présenté au chapitre 3, mais la formulation fait intervenir des opérateurs pseudo-différentiels. C'est un modèle non *splitté* qui repose sur l'introduction de variables auxiliaires. Les coefficients d'absorption que nous considérons sont variables, ce qui rend l'étude encore plus délicate. Dans un premier temps, nous construisons ce modèle. Ensuite, nous montrons que le problème est bien posé, au sens où nous établissons l'existence et l'unicité de la solution dans le cadre de la théorie de Hille-Yosida. Nous montrons aussi que ce modèle est équivalent à celui présenté dans [115] (voir aussi [135]). L'efficacité de ce modèle PML est illustrée par des simulations numériques au chapitre 6.

Dans le chapitre 7, nous couplons les CLA et les PML sur un modèle PML existant pour le système des équations de Maxwell en deux dimensions [2]. Nous développons des conditions aux limites artificielles d'ordre un et deux. Après avoir construit ces conditions, nous étudions le caractère bien posé des modèles couplés résultants. Enfin, nous mesurons l'impact des CLA sur le comportement des champs dans la couche en procédant à un calcul de coefficient de réflexion sur la frontière externe de la couche.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude d'un modèle PML existant pour les équations de l'élastodynamique [43]. La première partie concerne les aspects mathématiques : le caractère bien posé du modèle et sa stabilité. Nous calculons ensuite les coefficients de réflexion associés à ce modèle après discrétisation pour un schéma de différences finies d'ordre 2. Le but de ce calcul est d'optimiser éventuellement l'action de la PML, en suivant ce qui a déjà été fait pour le système de Maxwell [42]. Pour terminer, nous présentons une autre approche qui permet d'optimiser l'action de la PML, notamment à incidente rasante. Il s'agit d'une méthode de type *Convolution-PML* (C-PML), introduite par [114] pour les équations de Maxwell.

# Chapitre 1

# Quelques outils mathématiques

## 1.1 Notations et espaces fonctionnels utilisés

Dans tout ce qui suit, nous notons $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ le produit scalaire usuel de deux éléments $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée. Les coordonnées dans la base canonique de vecteurs $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont notées :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ \\ u_y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ \\ v_y \\ \\ v_z \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $||\cdot||_0$ la norme associée. Nous introduisons aussi l'espace produit suivant :

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3).$$

Nous utilisons, pour tout entier naturel $s$, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ [4] muni de sa norme $||\cdot||_s$ définie par :

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad ||u||_s = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} ||D^\alpha u||_0^2 \right)^{1/2}.$$

Nous rappelons maintenant la définition du rotationnel d'une distribution. On se place dans $\mathbb{R}^n$ tout entier, cadre convenable pour notre travail. Tout d'abord, on définit l'opérateur rotationnel d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)^3$ par :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix}.$$

Pour des éléments $\phi$ de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)^2$, cet opérateur est défini par :

$$\mathbf{rot}\,\phi = \begin{bmatrix} \partial_y \phi \\ \\ -\partial_x \phi \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x.$$

On définit aussi la divergence d'un élément $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)^n$ par :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} v_i.$$

Nous allons maintenant introduire les espaces fonctionnels que nous utilisons. Tout d'abord, nous considérons l'espace $\mathbb{H}(\mathrm{rot}, \mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\mathbb{H}(\mathrm{rot}, \mathbb{R}^3) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3),\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \right\},$$

espace de Hilbert pour sa norme naturelle :

$$||\boldsymbol{v}||_{\mathbb{H}(\mathrm{rot},\mathbb{R}^3)} = \left( ||\boldsymbol{v}||_0^2 + ||\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}||_0^2 \right)^{1/2}.$$

Nous disposons notamment du résultat de densité suivant [64].

**Théorème 1.1.1** *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ est dense dans $\mathbb{H}(rot, \mathbb{R}^3)$.*

Nous utilisons également l'espace de Sobolev $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ :

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}),\ u' \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\};$$

espace de Banach pour la norme :

$$u \mapsto ||u|| = \max\left( ||u||_{L^\infty(\mathbb{R})},\ ||\partial_x u||_{L^\infty(\mathbb{R})} \right).$$

Enfin, si $V$ désigne un espace de Banach et $T$ un élément de $\mathbb{R}_+^*$, on notera $L^2(0, T; V)$, l'espace de Lebesgue des (classes de) fonctions $\mathbf{f}$ :

$$]0, T[ \to V, \quad t \mapsto \mathbf{f}(t),$$

mesurables et qui vérifient :

$$\left( \int_0^T ||\mathbf{f}(t)||_V^2 \, dt \right)^{1/2} = ||\mathbf{f}||_{L^2(0,T;V)} < \infty.$$

L'application $\mathbf{f} \mapsto ||\mathbf{f}||_{L^2(0,T;V)}$ est une norme sur $L^2(0, T; V)$. Muni de cette norme, l'espace $L^2(0, T; V)$ est un espace de Banach.

## 1.2 Systèmes hyperboliques à coefficients constants

Dans ce qui suit, nous sommes amenés à résoudre certains systèmes hyperboliques du premier ordre à coefficients constants. Pour cela, nous utilisons des résultats classiques [85] que nous rappelons ici. On considère un problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i} \mathbf{U} + B\mathbf{U} = 0, & \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ \\ \mathbf{U}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{U_0}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\mathbf{U}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $A_1, \ldots, A_n, B$ des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

**Définition 1.2.1** *On dit que le problème de Cauchy (1.1) est faiblement (resp. fortement) bien posé si, pour tout $\mathbf{U_0}$ dans l'espace de Sobolev $H^s$, $s > 0$ (resp. $s = 0$), ce problème admet une unique solution $\mathbf{U}$ dans $C^0(\mathbb{R}_+, L^2)$ et si $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ vérifie une estimation du type :*

$$\forall t > 0, \quad ||\mathbf{U}(.,t)||_0 \leq C(t)\, ||\mathbf{U_0}||_s.$$

Les résultats relatifs au problème (1.1) peuvent s'obtenir grâce à l'étude du cas où $B = 0$. En notant $(1.1)_h$ ce système homogène, le problème (1.1) correspond à une perturbation d'ordre zéro de $(1.1)_h$. En associant au problème (1.1) la matrice symbole $A(\mathbf{k})$ définie par :

$$\forall \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad A(\mathbf{k}) = k_1 A_1 + \ldots k_n A_n;$$

nous allons maintenant rappeler les définitions d'hyperbolicité :

**Définition 1.2.2** *On dit que le système homogène $(1.1)_h$ est :*
- *hyperbolique si, pour tout $\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^n$, les valeurs propres de $A(\mathbf{k})$ sont réelles ;*
- *fortement hyperbolique si de plus, pour tout $\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^n$, $A(\mathbf{k})$ est diagonalisable (sinon, il est faiblement hyperbolique) ;*
- *strictement hyperbolique si, pour tout $\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^n$, les valeurs propres de $A(\mathbf{k})$ sont réelles et distinctes.*

Nous disposons alors des résultats suivants.

**Théorème 1.2.3** *Le système $(1.1)_h$ est bien posé si, et seulement si, il est hyperbolique.*

**Théorème 1.2.4** *Si le système homogène $(1.1)_h$ est fortement hyperbolique, alors le problème (1.1) est fortement bien posé et il existe des constantes strictement positives $C$ et $\alpha$ telles que :*

$$\forall t > 0, \quad ||\mathbf{U}(.,t)||_0 \leq Ce^{\alpha t}\, ||\mathbf{U_0}||_0. \tag{1.2}$$

**Remarque 1.2.5** *Si le système $(1.1)_h$ est seulement faiblement hyperbolique, le problème (1.1) n'est pas forcément mal posé (mais il l'est pour certaines matrices $B$).*

Comme le montre l'estimation (1.2), la notion de problème bien posé n'exclut pas des solutions exponentiellement croissantes qui sont physiquement inacceptables. C'est pour cette raison qu'il est utile de rappeler aussi la notion de stabilité suivante qui exprime que la solution du problème (1.1) est contrôlée en temps long.

**Définition 1.2.6** *On dit que le problème (1.1) est faiblement (resp. fortement) stable s'il est faiblement (resp. fortement) bien posé et si la solution* $\mathbf{U}(t)$ *vérifie une estimation de la forme :*

$$\forall t > 0, \quad ||\mathbf{U}(.,t)||_0 \leq C(1+t)^s\,||\mathbf{U_0}||_s.$$

*avec* $s > 0$ *(resp.* $s = 0$*).*

Le caractère bien posé et la stabilité du problème de Cauchy (1.1) sont liés à l'analyse de Fourier qui conduit notamment à rechercher des solutions particulières de (1.1) sous la forme :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{x},t) = \mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i(\omega t - \mathbf{k}.\boldsymbol{x})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$$

et par conséquent à l'étude de l'équation de dispersion :

$$\det\left(A(\mathbf{k}) + iB - \omega I\right) = 0, \tag{1.3}$$

que l'on considère comme une équation polynômiale en $\omega$, $\mathbf{k}$ jouant le rôle d'un paramètre. Si on note $\{\omega(\mathbf{k})\}$ l'ensemble des racines de (1.3), on a les résultats suivants.

**Proposition 1.2.7** *Le problème (1.1) est (fortement ou faiblement) bien posé si et seulement si :*

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{I}m\ \omega(\mathbf{k}) \text{ est minorée.}$$

**Proposition 1.2.8** *On suppose que le problème (1.1) est bien posé. Alors, ce système est stable si et seulement si :*

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{I}m\ \omega(\mathbf{k}) \geq 0.$$

**Remarque 1.2.9** *La théorie que nous venons de rappeler est utilisable uniquement dans le cas de systèmes à coefficients constants. Nous examinerons plus loin certains systèmes à coefficients variables et nous utiliserons alors une technique de résolution adaptée au modèle.*

## 1.3 Théorème de Hille-Yosida

Nous rappelons ici le théorème de Hille-Yosida [28], outil très efficace pour résoudre les équations d'évolution linéaires dans les espaces de Banach, et notamment les équations aux dérivées partielles d'évolution. Nous nous plaçons dans le cadre hilbertien, suffisant pour notre étude. On considère un espace de Hilbert réel $V$ muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et un opérateur $A$ défini sur un sous-espace $D(A)$ de $V$ ($D(A)$ est le domaine de $A$).

**Définition 1.3.1** *Un opérateur* $A : D(A) \subset V \to V$ *est dit :*
- *monotone si :* $\forall v \in D(A),\ (Av,v)_V \geq 0$ *;*
- *maximal monotone si de plus,* $A + I$ *est surjectif de* $D(A)$ *dans* $V$*.*

**Théorème 1.3.2** ***(Hille-Yosida)*** *Soit $A$ un opérateur maximal monotone dans $V$. Pour tout $u_0$ dans $D(A)$ et tout $f$ dans $C^1([0,T];V)$, il existe une unique fonction*

$$u \in C^1([0,T];V) \cap C^0([0,T];D(A))$$

*vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + Au = f \qquad \textit{sur} \ \ [0,T], \\ \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Grâce au théorème de Hille-Yosida, la résolution du problème d'évolution (1.4) se ramène à prouver que $A$ est maximal monotone, c'est-à-dire à étudier l'équation stationnaire $u + Au = v$.

## 1.4 Inverse explicite d'une matrice tridiagonale

Nous terminons cette partie en donnant un résultat d'algèbre que nous avons établi. Dans notre travail, nous avons été conduits à rechercher l'inverse d'une matrice tridiagonale de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

avec

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_k = -(b_k + b_{k-1}), \tag{1.6}$$

et $b_0$, $b_n$ quelconques.
À notre connaissance, il n'existe pas de formule générale donnant l'inverse explicite d'une matrice tridiagonale quelconque

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Cependant, si $T$ est inversible, on sait ([58], [129]) que les coefficients de $T^{-1}$ sont donnés par l'algorithme :

$$(T^{-1})_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{i+j} b_i \ldots b_{j-1} \theta_{i-1} \phi_{j+1} / \theta_n & \text{si } i \leq j, \\ \\ (-1)^{i+j} b_j \ldots b_{i-1} \theta_{j-1} \phi_{i+1} / \theta_n & \text{si } i > j, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

(le produit vide valant 1 par convention) où $(\theta_k)$ et $(\phi_k)$ sont définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = a_1, \\ \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \theta_{k+1} = a_{k+1}\theta_k - b_k c_k \theta_{k-1} \end{cases} \tag{1.8}$$

et

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = 1, \quad \phi_n = a_n, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \phi_{k-1} = a_{k-1}\phi_k - b_{k-1}c_{k-1}\phi_{k+1}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Cette formule va nous permettre de donner de manière explicite l'inverse de la matrice $A$. Pour cela, nous utilisons, pour tout $k$ dans $\{1, \dots, n\}$, la $k$-ème fonction symétrique élémentaire

$$\Sigma_k(z_1, \dots, z_n)$$

d'un élément $(z_1, \dots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad \Sigma_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} z_{i_1} \dots z_{i_k} \, ;$$

en convenant que $\Sigma_0(z_1, \dots, z_n) = 1$. Nous montrons alors la proposition suivante :

**Proposition 1.4.1** *Soit $A$ la matrice définie par (1.5) et (1.6). Si $A$ est inversible, la matrice symétrique $A^{-1}$ est donnée par :*

$$(A^{-1})_{ij} = -b_i \dots b_{j-1} \frac{\Sigma_{i-1}(b_0, \dots, b_{i-1})\Sigma_{n-j}(b_j, \dots, b_n)}{\Sigma_n(b_0, \dots, b_n)} \qquad \text{si } i \le j.$$

**Preuve** D'après la formule (1.7), les coefficients de la matrice symétrique $A^{-1}$ s'écrivent :

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} b_i \dots b_{j-1} \theta_{i-1} \phi_{j+1} / \theta_n \qquad \text{si } i \le j, \tag{1.10}$$

avec

$$\begin{cases} \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = a_1, \\ \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \theta_{k+1} = a_{k+1}\theta_k - b_k^2 \theta_{k-1}, \end{cases} \tag{1.11}$$

et

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = 1, \quad \phi_n = a_n, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \phi_{k-1} = a_{k-1}\phi_k - b_{k-1}^2 \phi_{k+1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Montrons alors par récurrence sur $k$ que l'on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \theta_k = (-1)^k \Sigma_k(b_0, \dots, b_k). \tag{1.13}$$

La propriété (1.13) est vraie aux rangs 0 et 1 puisque :

$$\theta_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \theta_1 = a_1 = -(b_1 + b_0) = -\Sigma_1(b_0, b_1).$$

Supposons maintenant que :

$$\theta_{k-1} = (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1}(b_0, \ldots, b_{k-1}) \quad \text{et} \quad \theta_k = (-1)^k \Sigma_k(b_0, \ldots, b_k). \tag{1.14}$$

Grâce aux relations (1.6) et (1.11), nous avons alors :

$$\begin{aligned}\theta_{k+1} = (-1)^{k+1} b_{k+1}\Sigma_k(b_0, \ldots, b_k) + (-1)^{k+1} b_k \Sigma_k(b_0, \ldots, b_k) \\ + (-1)^k b_k^2 \Sigma_{k-1}(b_0, \ldots, b_{k-1}).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Par ailleurs, on a, d'une part :

$$b_{k+1}\Sigma_k(b_0, \ldots, b_k) = \Sigma_{k+1}(b_0, \ldots, b_{k+1}) - b_0 \ldots b_k; \tag{1.16}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}b_k\Sigma_k(b_0, \ldots, b_k) &= b_k \left[b_k \Sigma_{k-1}(b_0, \ldots, b_{k-1}) + b_0 \ldots b_{k-1}\right] \\ &= b_k^2 \Sigma_{k-1}(b_0, \ldots, b_{k-1}) + b_0 \ldots b_k.\end{aligned} \tag{1.17}$$

En injectant les relations (1.16) et (1.17) dans (1.15), on obtient :

$$\theta_{k+1} = (-1)^{k+1}\Sigma_{k+1}(b_0, \ldots, b_{k+1});$$

c'est-à-dire l'égalité (1.13) est au rang $k+1$.
Une récurrence analogue montre que $(\phi_k)_{0 \le k \le n}$ est donnée par :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \phi_k = (-1)^{n+1-k}\Sigma_{n+1-k}(b_{k-1}, \ldots, b_n). \tag{1.18}$$

Les relations (1.10), (1.13) et (1.18) donnent alors l'inverse explicite de la matrice $A$ :

$$\forall i \le j, \quad (A^{-1})_{ij} = -b_i \ldots b_{j-1} \frac{\Sigma_{i-1}(b_0, \ldots, b_{i-1})\Sigma_{n-j}(b_j, \ldots, b_n)}{\Sigma_n(b_0, \ldots, b_n)},$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

**Remarque 1.4.2** *Si on remplace l'hypothèse (1.6) par :*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_k = b_k + b_{k-1},$$

*on montre alors que :*

$$\theta_k = \Sigma_k(b_0, \ldots, b_k) \qquad \textit{et} \qquad \phi_k = \Sigma_{n+1-k}(b_{k-1}, \ldots, b_n).$$

*En utilisant (1.10), cela donne :*

$$\forall i \le j, \quad (A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} b_i \ldots b_{j-1} \frac{\Sigma_{i-1}(b_0, \ldots, b_{i-1})\Sigma_{n-j}(b_j, \ldots, b_n)}{\Sigma_n(b_0, \ldots, b_n)}.$$

*En particulier, si on prend $b_k = k + m$ ($m \in \mathbb{N}$) pour tout $k$ dans $\{0, \ldots, n\}$, la proposition précédente donne l'inverse explicite de la matrice $A_m$ définie par :*

$$A_m = \begin{bmatrix} 2m+1 & m+1 & 0 & & 0 \\ m+1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & m+n-1 \\ 0 & & 0 & m+n-1 & 2(m+n)-1 \end{bmatrix}.$$

## 1.5 Généralités sur les opérateurs pseudo-différentiels

Nous terminons ce chapitre en donnant quelques éléments de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels que nous utilisons dans les chapitres suivants. On peut trouver ces résultats dans [120] et [126].
Tout d'abord, si $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction $f$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$, nous considérons la représentation intégrale de Fourier :

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Nous avons alors la relation :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha f(\boldsymbol{x}) = D^\alpha \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} = \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}^\alpha e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi},$$

avec $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$ et $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour tout $j$ dans $\{1, \cdots, n\}$.
Ainsi, pour un opérateur différentiel linéaire $p\,(\boldsymbol{x}, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha$, on a :

$$p(\boldsymbol{x}, D) f(\boldsymbol{x}) = \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \tag{1.19}$$

où $p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\xi}^\alpha$.
La fonction $p = p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ est généralement appelée série formelle de $p\,(\boldsymbol{x}, \vec{D})$.
Pour définir un opérateur pseudo-différentiel, nous utilisons la représentation (1.19) en prenant la fonction $p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ dans une classe plus générale que celle associée aux opérateurs différentiels. La fonction $p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ est alors appelée symbole pour l'opérateur plutôt que série formelle. Cela est dû au fait que, dans le cas général d'un opérateur pseudo-différentiel, cette fonction n'est plus polynômiale. Nous définissons maintenant la classe $S^m$ que nous utilisons dans la suite.

**Définition 1.5.1** *Le symbole $p\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ appartient à la classe $S^m$, $m \in \mathbb{R}$, s'il vérifie les propriétés suivantes :*

*(i) si $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et pour tout compact $K$ inclus dans $\Omega$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$ telle que :*

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha\, p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{m-|\alpha|};$$

*(ii) il existe des fonctions régulières $p_{m-j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ homogènes de degré $m - j$ en $\boldsymbol{\xi}$ pour $|\boldsymbol{\xi}| \geq 1$ :*

$$p_{m-j}(\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{\xi}) = r^{m-j} p_{m-j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \;\; |\boldsymbol{\xi}| \geq 1, \; |r| \geq 1,$$

*telles que :*

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

*où $\sim$ signifie que :*

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \sum_{j=0}^{N} p_{m-j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^{m-(N+1)}.$$

**Proposition 1.5.2** *Soient $p$ dans $S^m$ et $q$ dans $S^l$, avec $(m,l) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

$$D_x^\beta D_\xi^\alpha \, p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in S^{m-|\alpha|} \qquad et \qquad p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in S^{m+l}.$$

*Si de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})^{-1}| \geq C(1+|\boldsymbol{\xi}|)^m,$$

*on dit que le symbole $p$ est fortement elliptique et le symbole $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})^{-1}$ existe avec $p \in S^{-m}$.*

Ainsi, si on dérive un symbole par rapport à la variable primale $x$, on ne change pas son degré d'homogénéité et le symbole dérivé reste dans la même classe. Seule la dérivation par rapport à la variable duale modifie le degré d'homogénéité.
Nous donnons maintenant la représentation intégrale d'un opérateur pseudo-différentiel. Si $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ désigne un élément de $S^m$, on peut définir un opérateur $P$ en posant :

$$Pf = \int p\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}. \tag{1.20}$$

L'opérateur $P$ est alors un opérateur pseudo-différentiel et on dit que $P$ appartient à $\mathrm{OPS}^m$. Tout opérateur de $\mathrm{OPS}^m$ vérifie la propriété (*ii*) de la définition 1.5.1. Ainsi, il admet un développement asymptotique dans lequel chaque terme est un opérateur qui est repéré par son ordre, comme conséquence du développement de son symbole en symboles homogènes. Dans la suite, on adopte les notations suivantes. Si $P$ est un opérateur de $\mathrm{OPS}^m$, $\sigma(P)$ désigne son symbole, $\sigma_P(P)$ son symbole principal, c'est-à-dire le premier terme dans le développement asymptotique de $\sigma(P)$ (le terme dont le degré d'homogénéité est le plus bas). La fonction $\sigma_j(P)$ représente le terme de $S^j$ dans le développement asymptotique de $\sigma(P)$. Réciproquement, si $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ appartient à $S^m$, on note $\mathrm{Op}(p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))$ l'opérateur de $\mathrm{OPS}^m$ dont le symbole est $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$.
Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 1.5.3** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p$ dans $S^m$ et $P$ l'opérateur défini par (1.20). Alors $P$ est un opérateur continu :*

$$P : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega).$$

*De plus, $P$ se prolonge en une application continue :*

$$P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dans le cadre des espaces de Sobolev, ce théorème admet la généralisation suivante [126].

**Théorème 1.5.4** *Soit $P$ un opérateur de $OPS^m$. Pour tout réel $s$, l'application $\varphi \mapsto P\varphi$ peut se prolonger en une application linéaire de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-m}_{loc}(\Omega)$.*

Nous terminons cette partie en donnant des règles de calcul utiles dans la suite (voir [126]). La première de ces règles concerne la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels.

**Théorème 1.5.5** *Soient $P \in OPS^m$ et $Q \in OPS^l$, avec $(m,l) \in \mathbb{R}^2$. On note $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ et $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ leurs symboles respectifs. On a alors :*

$$\sigma(PQ) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \partial_x^\alpha q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}).$$

Le théorème 1.5.5 montre notamment que $\sigma(PQ) \neq \sigma(QP)$ en général. Ceci conduit à introduire le commutateur $[P, Q] = PQ - QP$ pour lequel on a le résultat suivant.

**Théorème 1.5.6** *Soient $P \in OPS^m$, $Q \in OPS^l$. L'opérateur $[P, Q]$ appartient à $OPS^{m+l-1}$ et son symbole principal est donné par le crochet de Poisson :*

$$\sigma_P\left([P, Q]\right) = \{p, q\} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial \xi_j}\right)$$

Enfin, grâce au théorème 1.5.5, on obtient le symbole de l'inverse d'un opérateur $P$ de $\mathrm{OPS}^m$.

**Théorème 1.5.7** *Soit $P \in OPS^m$ de symbole principal $p_m \in S^m$ fortement elliptique et de symbole $p$. Alors $P$ est inversible d'inverse $P^{-1}$ dans $OPS^{-m}$. Le symbole principal de $P^{-1}$ est donné par $p_m^{-1}$ et son symbole $q$ est défini par :*

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\partial_x^\alpha q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = 1.$$

L'expression du symbole $q$ s'obtient en appliquant la formule de composition du théorème 1.5.5 avec $Q = P^{-1}$. En cherchant le symbole $q$ sous forme d'un développement asymptotique :

$$q \sim \sum_{j \geq -m} q_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

on peut calculer chaque fonction homogène $q_j$ en identifiant les termes ayant le même degré d'homogénéité. Ainsi, le symbole principal de $P^{-1}$ est l'inverse du symbole principal de $P$.

# Chapitre 2

# Les équations de Maxwell

## 2.1 Présentation des équations de Maxwell

Un champ électromagnétique dans un milieu parfait (*i.e.* linéaire, homogène et isotrope) est décrit par les deux vecteurs [46] :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\boldsymbol{x},t): \text{ champ électrique,} \\ &\mathbf{H}(\boldsymbol{x},t): \text{ champ magnétique ;} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ désigne la variable d'espace et $t \geq 0$ désigne le temps.
Les variations en espace et en temps de ces vecteurs sont régies par les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} i) & \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + \mathbf{j} = \mathbf{0}, \\ ii) & \mu \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ iii) & \mathrm{div}\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ iv) & \mathrm{div}\mathbf{H} = 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\rho$ est la densité de charge électrique et $\mathbf{j}$ le vecteur densité de courant. Dans un milieu parfait, $\varepsilon$ et $\mu$ sont des constantes ; elles désignent respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu.
D'après (2.1), les densités $\rho$ et $\mathbf{j}$ sont liées par la loi de conservation de la charge :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0.$$

Il est possible de simplifier le système des équations de Maxwell (2.1) : en effet, si l'on suppose que les deux dernières relations de (2.1) sont vérifiées à l'instant initial $t = 0$, on démontre (voir [46]) qu'elles sont satisfaites pour tout $t$. Ainsi, l'évolution du champ électromagnétique $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ est donnée par les deux équations vectorielles (2.1) i) et (2.1) ii).
Dans les chapitres suivants, nous nous intéresserons plus particulièrement aux équations de Maxwell formulées en l'absence de charge et de courant ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$ et $\rho = 0$) :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.2}$$

En particulier, dans le vide, nous avons :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \simeq 8,85\ 10^{-12}\,\mathrm{F.m}^{-1}, \quad \mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H.m}^{-1};$$

ces deux constantes étant liées à la vitesse de la lumière $c$ dans le vide par la relation :

$$\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1.$$

## 2.2 Lien avec l'équation des ondes

On suppose ici que $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ et $\rho = 0$ et on dérive (2.1) i) par rapport au temps. En utilisant la formule :

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \nabla \mathrm{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E};$$

on voit que $\mathbf{E}$ vérifie l'équation des ondes :

$$\partial_t^2 \mathbf{E} - v^2 \Delta\mathbf{E} = \mathbf{0},$$

où $v = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ est la vitesse de propagation des ondes (vitesse de la lumière dans le milieu). De même, en dérivant (2.1) ii) par rapport au temps, on montre que $\mathbf{H}$ est solution de l'équation des ondes.

## 2.3 Résolution des équations de Maxwell par ondes planes

Il est bien connu (voir [95] par exemple) que le système des équations de Maxwell (2.2) admet des solutions particulières de type ondes planes monochromatiques :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E_0} \\ \\ \mathbf{H_0} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{2.3}$$

si et seulement si $\mathbf{k} = {}^t[k_x, k_y, k_z]$ et $\omega$ vérifient la relation de dispersion :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{2.4}$$

Dans ce qui précède, la constante $\omega$ représente la pulsation du champ électromagnétique, $\mathbf{k}$ est appelé le vecteur d'onde et indique la direction et le sens de propagation de l'onde ; enfin les vecteurs constants $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ désignent les amplitudes des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. Ces amplitudes sont liées puisqu'elles sont contraintes par les équations de Maxwell.
L'onde définie par (2.3) est dite plane car elle se propage dans une direction précise (donnée par $\mathbf{k}$) et monochromatique car elle possède une pulsation $\omega$ bien définie (le champ est une fonction périodique simple du temps). Par ailleurs, la phase $\varphi$ de cette onde est, par définition :

$$\varphi = \omega t - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x}.$$

Notons que la relation de dispersion (2.4) donne la norme du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ :

$$||\mathbf{k}|| = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Nous ferons souvent appel à la résolution d'un problème par ondes planes, notamment pour analyser le phénomène de réflexion sur une interface.

## 2.4 Ondes transverses électriques et transverses magnétiques

Dans la suite, nous considérons uniquement des problèmes de nature "cylindrique" c'est-à-dire que nous supposons que :

- le domaine de propagation est de la forme $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,
- les sources sont indépendantes de $z$.

Dans ce cas, on montre que les solutions de (2.2) sont indépendantes de $z$ ; ce système se décompose alors en deux sous-systèmes d'équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t E_x - \partial_y H_z = 0, \\ \varepsilon_0 \partial_t E_y + \partial_x H_z = 0, \\ \mu_0 \partial_t H_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0; \end{cases} \tag{2.5}$$

et :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t H_x + \partial_y E_z = 0, \\ \varepsilon_0 \partial_t H_y - \partial_x E_z = 0, \\ \varepsilon_0 \partial_t E_z + \partial_y E_x - \partial_x E_y = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Le système (2.5) est le système des ondes transverses électriques : le champ électrique reste dans le plan $0xy$ orthogonal à la direction d'invariance $0z$. De même, (2.6) est le système des ondes transverses magnétiques ($\mathbf{H}$ reste dans le plan $0xy$ orthogonal à la direction $0z$). On parle de mode transverse électrique (TE) pour (2.5) et de mode transverse magnétique (TM) pour (2.6). Les équations de Maxwell étant linéaires, le théorème de superposition s'applique : tout champ électromagnétique est la somme d'un champ TE et d'un champ TM.
Plus généralement, l'onde est transverse électrique (respectivement transverse magnétique) lorsque le champ $\mathbf{E}$ (respectivement $\mathbf{H}$) est orthogonal à la direction de propagation. En particulier, lorsque l'on considère une onde plane de la forme (2.3), on est en mode TE lorsque $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ et en mode TM lorsque $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$.

## 2.5 Réflexion et transmission

Nous nous plaçons ici en l'absence de charge et de courant. Nous considérons deux milieux parfaits définis par leur constante diélectrique $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ et leur perméabilité $\mu_1$, $\mu_2$, en contact suivant l'interface $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$. Soit une onde plane et monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k_i}$ qui se propage dans le milieu 1 et arrive sur l'interface $\Gamma$. Cette onde, dite incidente, donne (en général) naissance à une onde plane réfléchie de vecteur d'onde $\mathbf{k_r}$, et à une onde plane transmise (ou réfractée) de vecteur d'onde $\mathbf{k_t}$. Nous allons donner la relation qui existe entre les ondes incidente, réfléchie et transmise. Pour cela, nous appliquons les conditions de continuité appropriées [55] à ces trois ondes : les composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ par rapport à l'interface sont continues. Les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_i} &= \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_i}.\boldsymbol{x}-\omega t)},\\
\mathbf{E_r} &= \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_r}.\boldsymbol{x}-\omega t)},\\
\mathbf{E_t} &= \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_t}.\boldsymbol{x}-\omega t)}.
\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell donnent alors les champs magnétiques correspondants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H_i} &= \frac{1}{\omega\mu_1}\mathbf{k_i} \wedge \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_i}.\boldsymbol{x}-\omega t)},\\
\mathbf{H_r} &= \frac{1}{\omega\mu_1}\mathbf{k_r} \wedge \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_r}.\boldsymbol{x}-\omega t)},\\
\mathbf{H_t} &= \frac{1}{\omega\mu_1}\mathbf{k_t} \wedge \mathbf{E_0} e^{i(\mathbf{k_t}.\boldsymbol{x}-\omega t)}.
\end{aligned}$$

Par définition, le coefficient de réflexion $r$ est égal au rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur celle de l'onde incidente :

$$r = \frac{||\mathbf{E_r}||}{||\mathbf{E_i}||};$$

le coefficient de transmission étant défini de manière analogue :

$$t = \frac{||\mathbf{E_t}||}{||\mathbf{E_i}||}.$$

Les conditions de continuité doivent être satisfaites partout sur l'interface. Ainsi, il faut que les champs aient la même périodicité le long de l'interface. Autrement dit, les facteurs de phase $e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x})}$ sont les mêmes pour les trois ondes en $x = 0$. Cette condition se traduit par les égalités :

$$(\mathbf{k_i})_y = (\mathbf{k_r})_y = (\mathbf{k_t})_y \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{k_i})_z = (\mathbf{k_r})_z = (\mathbf{k_t})_z. \tag{2.7}$$

Si on choisit d'orienter les axes de coordonnées de manière à avoir $(\mathbf{k_i})_z = 0$ (ce qui est toujours possible), on a alors $(\mathbf{k_r})_z = (\mathbf{k_t})_z = 0$ d'après (2.7). Cela signifie que les trois vecteurs d'ondes $\mathbf{k_i}$, $\mathbf{k_r}$ et $\mathbf{k_t}$ sont dans le même plan $\{z = 0\}$. Ce plan, orthogonal à l'interface, est appelé plan d'incidence. On définit alors $\theta_i$, $\theta_r$ et $\theta_t$, angles de droites, que font respectivement $\mathbf{k_i}$, $\mathbf{k_r}$ et $\mathbf{k_t}$ avec $\mathbf{e_1}$ dans le plan d'incidence. Ce sont les angles d'incidence, de réflexion et de transmission.

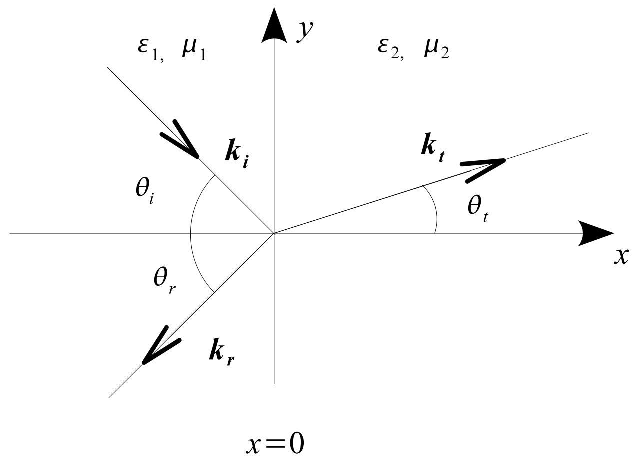



FIG. 2.1 – onde incidente sur l'interface $\Gamma$

La première des relations de (2.7) s'écrit alors :

$$||\mathbf{k_i}|| \sin\theta_i = ||\mathbf{k_r}|| \sin\theta_r = ||\mathbf{k_t}|| \sin\theta_t. \tag{2.8}$$

Mais, les relations de dispersion vérifiées par les vecteurs d'onde montrent que nous avons d'une part :

$$||\mathbf{k_i}|| = ||\mathbf{k_r}|| \ (= \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}), \tag{2.9}$$

et d'autre part :

$$\frac{||\mathbf{k_i}||}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{||\mathbf{k_t}||}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \ (= \omega). \tag{2.10}$$

En injectant les égalités (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient alors les relations :

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\sin\theta_t. \tag{2.11}$$

La première de ces relations stipule que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux, alors que la deuxième relation est la loi classique de Snell-Descartes pour l'angle de transmission.

# Chapitre 3

# Équations de Maxwell en milieu absorbant semi-infini

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés mathématiques du système des équations de Maxwell posé dans un milieu absorbant. Nous commençons par une rapide description des milieux absorbants les plus standards. De manière plus générale que ce qui a été présenté au chapitre 2, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{D} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{j} = \mathbf{0}, & (3.1) \\ \partial_t \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, & (3.2) \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, & (3.3) \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; & (3.4) \end{cases}$$

où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ désignent respectivement l'induction électrique et l'induction magnétique. Comme dans le chapitre 2, $\mathbf{E}$ est le champ électrique, $\mathbf{B}$ le champ magnétique et $\mathbf{j}$ la densité de courant. Les équations (3.1) et (3.2) sont plus fondamentales que les équations (3.3) et (3.4) qui traduisent des propriétés de la matière. Nous avons vu au chapitre 2 que dans un milieu parfait, $\varepsilon$ et $\mu$ sont des constantes (égales à $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ dans le vide). Même si l'on envisage le cas où $\varepsilon$ et $\mu$ varient en fonction de la position, la loi de comportement linéaire décrite par (3.3) et (3.4) n'est pas vérifiée par une classe importante de matériaux (le fer, par exemple). En revanche, les équations (3.1) et (3.2) sont toujours valables. Par ailleurs, la densité de charge électrique $q$ est définie par :

$$q = \operatorname{div} \mathbf{D};$$

elle est reliée à la densité de courant par la loi de conservation de la charge :

$$\partial_t q + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

La force $\mathbf{f}$ exercée sur une charge ponctuelle $q$ se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ est donnée par :

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

L'énergie électromagnétique $\mathcal{W}$ est, quant à elle, définie dans tout l'espace par :

$$\mathcal{W}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right) \, d\mathbf{x}.$$

Dans le cas particulier d'un corps conducteur, le champ électrique $\mathbf{E}$ est proportionel à la densité de courant en suivant la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

où $\sigma$ représente la conductivité. C'est une quantité positive, nulle dans les isolants comme le vide ou l'air, par exemple. Dans le cas d'un diélectrique isotrope et homogène, le milieu acquiert, sous l'action d'un champ électrique, une polarisation $\mathbb{P}$ qui représente le moment magnétique par unité de volume. L'induction électrique est alors plutôt définie par :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbb{P};$$

la polarisation étant nulle dans le vide. Le vecteur polarisation $\mathbb{P}$ n'est pas indépendant du champ $\mathbf{E}$ à l'intérieur du milieu. Dans de très nombreux matériaux (linéaires et isotropes), l'expérience montre que $\mathbb{P}$ est colinéaire et proportionnel à $\mathbf{E}$. Nous introduisons alors les paramètres $\chi$ et $\chi_r$ qui désignent respectivement les susceptibilités absolue et relative du milieu et nous avons :

$$\mathbb{P} = \chi \, \mathbf{E} \qquad \text{avec} \qquad \chi = \varepsilon_0 \chi_r.$$

En identifiant les deux expressions de $\mathbf{D}$, on obtient :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi_r;$$

et $\varepsilon_r$ est appelée la permittivité relative du milieu tandis que $\varepsilon$ est la permittivité absolue.

Dans le cas d'un milieu anisotrope linéaire, on suppose qu'il existe une matrice symétrique réelle $[\varepsilon]$, appelée tenseur de permittivité électrique, telle que :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon] \mathbf{E}.$$

La matrice $[\varepsilon]$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Quitte à nous placer dans une base de vecteurs propres du milieu, nous pouvons donc supposer que $[\varepsilon]$ est diagonal et nous avons alors :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \mathbf{E}.$$

Le cas où $[\varepsilon]$ est à coefficients complexes correspond à un milieu anisotrope circulaire. La matrice $[\varepsilon]$ est alors hermitienne.

En perturbant l'expresssion de $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ par des termes plus ou moins complexes, on peut prendre en compte, dans la loi constitutive, de la bianosotropie, de la symétrie chirale ou des effets de mémoire. Cela se traduit par une dépendance en temps des coefficients de $[\varepsilon]$ et $[\mu]$, et par la présence d'un opérateur de convolution (qui rend compte de certains effets de mémoire). Dans [25], il est prouvé que si le matériau est périodique et bianisotrope avec effets de mémoire, la loi constitutive fait aussi intervenir un opérateur de Hilbert-Schmidt plus complexe qu'un opérateur de convolution. D'après [25], les inductions électrique et magnétique sont reliées au champ électromagnétique par les relations :

$$\mathbf{D} = [\varepsilon] * \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = [\mu] * \mathbf{H};$$

où $*$ désigne le produit de convolution en temps. Les tenseurs $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ ont la forme :

$$[\varepsilon] = \varepsilon_0\,[\varepsilon_r]\,\delta\,[1] + [\sigma]Y + [\nu^{\mathbf{E}}], \tag{3.5}$$

$$[\mu] = \mu_0\,[\mu_r]\,\delta\,[1] + [\tau]Y + [\nu^{\mathbf{H}}]; \tag{3.6}$$

où $[\sigma]$ désigne le tenseur de conductivité électrique et $[\nu^{\mathbf{H}}]$ la susceptibilité magnétique. Les tenseurs $[\tau]$ et $[\nu^{\mathbf{E}}]$ sont introduits pour préserver la symétrie des équations de Maxwell, et non pas pour des raisons liées aux propriétés physiques des matériaux considérés dans [25]. Enfin, $\delta$ désigne la distribution de Dirac à l'origine et $Y$ la fonction de Heaviside. Dans le cas général d'un matériau chiral, les lois constitutives s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = [\varepsilon_1] * \mathbf{E} + [\mu_1] * \mathbf{H}, \\ \\ \mathbf{B} = [\varepsilon_2] * \mathbf{E} + [\mu_2] * \mathbf{H}; \end{cases} \tag{3.7}$$

où les tenseurs $[\varepsilon_1]$, $[\varepsilon_2]$ s'écrivent sous la forme (3.5) et les tenseurs $[\mu_1]$, $[\mu_2]$ sous la forme (3.6). Un travail plus ancient [8] concerne les propriétés absorbantes de matériaux bianisotropes du type (3.7). Le cadre mathématique n'est pas le même que dans [25] où l'on développe une analyse mathématique destinée à construire un modèle homogénéisé équivalent. Dans [8], on ne considère que les propriétés physiques des matériaux, dans le but de mettre en évidence leurs propriétés d'absorption et surtout de montrer qu'il est possible de construire de tels matériaux dont les utilisations sont nombreuses et stratégiques.

Dans la suite, nous étudions un modèle appartenant à la catégorie des modèles bianisotropes considérés dans [8]. Ces modèles sont plus simples que ceux étudiés dans [25] car les lois constitutives décrivant $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ sont données par :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\mathbf{E} + \mathbb{P}), \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbb{Q});$$

où les polarisations $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont solutions des équations différentielles du second ordre en temps suivantes :

$$\varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbb{P} = [p]\mathbf{E}, \qquad \mu_0 \partial_t^2 \mathbb{Q} = [q]\mathbf{H};$$

$[p]$ et $[q]$ représentant des tenseurs de fonctions positives.

Après avoir présenté le modèle retenu ici, nous nous intéressons aux questions suivantes. Tout d'abord, nous montrons que le problème étudié admet une unique solution dans un cadre hilbertien. Ensuite, nous développons des conditions aux limites absorbantes bien adaptées au modèle et susceptibles d'être intégrées facilement dans un code de calcul.

## 3.2 Présentation du modèle étudié

Afin de préserver la structure du système des équations de Maxwell, nous introduisons les vecteurs $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ définis par :

$$\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{P} = [\nu]\mathbf{E}, \qquad \mu_0 \partial_t \mathbf{Q} = [\eta]\mathbf{H};$$

où les tenseurs $[\nu]$ et $[\eta]$ sont tels que :

$$[p] = [\nu]^2, \qquad [q] = [\eta]^2.$$

Le système des équations de Maxwell est ainsi couplé à deux équations différentielles d'ordre un en temps et on se ramène au système suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [\nu]\mathbf{P} = 0, \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [\eta]\mathbf{Q} = 0, \\ \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{P} = [\nu]\mathbf{E}, \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{Q} = [\eta]\mathbf{H}. \end{cases}$$

## 3.3 Caractère bien posé

### 3.3.1 Introduction

Nous étudions maintenant le caractère bien posé du modèle $(\mathcal{P})$. Quitte à effectuer les changements de variables suivants :

$$\tilde{t} = ct \text{ (avec } c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}),$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}, \qquad \widetilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H}, \qquad \widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}, \qquad \widetilde{\mathbf{Q}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{Q},$$

$$[\tilde{\sigma}] = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[\sigma], \qquad [\tilde{\tau}] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\tau], \qquad [\tilde{\nu}] = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[\nu], \qquad [\tilde{\eta}] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\eta],$$

nous supposons, sans perte de généralité, que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Ainsi, nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [\nu]\mathbf{P} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], & (3.8) \\ \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [\eta]\mathbf{Q} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], & (3.9) \\ \partial_t \mathbf{P} - [\nu]\mathbf{E} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], & (3.10) \\ \partial_t \mathbf{Q} - [\eta]\mathbf{H} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], & (3.11) \\ \mathbf{E}(\mathbf{x},0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x},0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^3, & \\ \mathbf{P}(\mathbf{x},0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x},0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^3. & \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant quelques notations. Afin d'alléger la rédaction, nous notons :

$$V = \mathbb{H}(\mathrm{rot}, \mathbb{R}^3), \qquad \mathbb{X} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

Afin de considérer le cas d'un matériau absorbant semi-infini, nous supposons que les tenseurs de fonctions sont à support dans $\{x > 0\}$. Le demi-espace $\{x < 0\}$ est ainsi supposé rempli de vide. Nous introduisons alors des espaces de fonctions nulles dans le demi-espace $\{x < 0\}$ :

$$W = \{w \in L^\infty(\mathbb{R}^3),\ \forall x < 0,\ w \equiv 0\},$$
$$W_+ = \{w \in W, \forall x > 0,\ w > 0\};$$

et on considère l'espace $M_W$ (respectivement $M_{W_+}$) des opérateurs diagonaux à coefficients dans $W$ (respectivement $W_+$). Nous adoptons la notation :

$$\forall\,[\sigma] = \mathrm{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \in M_W, \quad \forall \mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3, \quad [\sigma]\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sigma_x\, u_x \\ \sigma_y\, u_y \\ \sigma_z\, u_z \end{bmatrix}.$$

Enfin, pour un opérateur $[\sigma] = \mathrm{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ de $M_W$, nous notons :

$$|\sigma| = \max\left(||\sigma_x||_\infty, ||\sigma_y||_\infty, ||\sigma_z||_\infty\right).$$

### 3.3.2 Existence et unicité de la solution

Nous allons maintenant montrer que le problème $(\mathcal{P}_1)$ est bien posé. Pour prouver ce résultat, nous utilisons le théorème de Hille-Yosida. Nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 3.3.1** *Soient* $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0})$ *dans* $\mathcal{D}(A) := V \times V \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ *;* $[\nu]$, $[\eta]$ *dans* $M_W$ *et* $[\sigma], [\tau]$ *dans* $M_{W_+}$. *Le problème* $(\mathcal{P}_1)$ *admet une unique solution*

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \quad \textit{dans} \quad C^1\left([0,T], \mathbb{X}\right) \cap C^0\left([0,T], \mathcal{D}(A)\right).$$

*De plus,*

$$\forall t > 0, \quad ||\mathbf{E}(.,t), \mathbf{H}(.,t), \mathbf{P}(.,t), \mathbf{Q}(.,t)||_0 \leq ||\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0}||_0. \tag{3.12}$$

**Preuve**. 1) Montrons tout d'abord l'existence et l'unicité de $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$. On introduit pour cela l'opérateur

$$A : \mathcal{D}(A) = V \times V \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{X} = (\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))^4,$$

défini par :

$$A = \begin{bmatrix} [\sigma] & -\mathrm{rot} & [\nu] & 0 \\ \mathrm{rot} & [\tau] & 0 & [\eta] \\ -[\nu] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\eta] & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système formé par les équations (3.8), (3.9), (3.10) et (3.11) est alors équivalent à

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{Q}(t) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{Q}(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Nous allons montrer que l'opérateur $A$ est maximal monotone et appliquer le théorème de Hille-Yosida. Tout d'abord, il est clair que $A$ est monotone grâce à la positivité de $[\sigma]$ et $[\tau]$ :

$$\forall \mathbf{v} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}) \in \mathcal{D}(A), \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = ([\sigma]\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}) + ([\tau]\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}) \geq 0.$$

Afin d'établir la maximalité de $A$, considérons maintenant un élément $\mathbf{u} = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4})$ de $(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))^4$. On cherche $\mathbf{v} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$ dans $\mathcal{D}(A)$ vérifiant

$$(A + I)\mathbf{v} = \mathbf{u}, \tag{3.14}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (I+[\sigma])\mathbf{v}_1 - \operatorname{rot}\mathbf{v}_2 + [\nu]\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1, & (3.15)\\ \operatorname{rot}\mathbf{v}_1 + (I+[\tau])\mathbf{v}_2 + [\eta]\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2, & (3.16)\\ \mathbf{v}_3 - [\nu]\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_3, & (3.17)\\ \mathbf{v}_4 - [\eta]\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_4. & (3.18) \end{cases}$$

Les relations (3.17) et (3.18) permettent d'éliminer $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v}_4$ du système. Le système précédent devient alors :

$$\begin{cases} (I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1 - \operatorname{rot}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - [\nu]\mathbf{u}_3, \\ \\ (I+[\tau]+[\eta]^2)\mathbf{v}_2 + \operatorname{rot}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - [\eta]\mathbf{u}_4. \end{cases} \tag{3.19}$$

Notons maintenant $\tilde{\mathbf{u}_1}$ and $\tilde{\mathbf{u}_2}$ les fonctions définies par :

$$\tilde{\mathbf{u}_1} = \mathbf{u_1} - [\nu]\mathbf{u_3}, \qquad \tilde{\mathbf{u}_2} = \mathbf{u_2} - [\eta]\mathbf{u_4};$$

$\tilde{\mathbf{u}_1}$ et $\tilde{\mathbf{u}_2}$ appartiennent à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ puisque $[\nu]$ et $[\eta]$ sont dans $M_W$.
Par ailleurs, l'opérateur $\left(I+[\tau]+[\eta]^2\right)$ est inversible puisque $[\tau]$ appartient à $M_{W_+}$ et que :

$$I+[\tau]+[\eta]^2 = \operatorname{diag}\left(1+\tau_x+\eta_x^2, 1+\tau_y+\eta_y^2, 1+\tau_z+\eta_z^2\right).$$

On introduit alors l'opérateur $B$ de $M_{W_+}$ défini par :

$$B = \left(I+[\tau]+[\eta]^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\tau_x+\eta_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\tau_y+\eta_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\tau_z+\eta_z^2} \end{bmatrix}.$$

On peut éliminer $\mathbf{v_2}$ en utilisant la deuxième équation du système (3.19) :

$$\mathbf{v}_2 = B\left(\tilde{\mathbf{u}_2} - \operatorname{rot}\mathbf{v_1}\right).$$

On cherche alors un couple $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ dans $V^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} (I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1 - \operatorname{rot}\left(B\left(\tilde{\mathbf{u}_2} - \operatorname{rot}\mathbf{v_1}\right)\right) = \tilde{\mathbf{u}_1}, & (3.20)\\ \\ \mathbf{v}_2 = B\left(\tilde{\mathbf{u}_2} - \operatorname{rot}\mathbf{v_1}\right). & (3.21) \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram va permettre de résoudre le problème en $\mathbf{v_1}$ (3.20). Nous en déduirons ensuite l'existence de $\mathbf{v_2}$ grâce à l'équation (3.21).
Soit $a$ la forme bilinéaire définie sur $V \times V$ par

$$\forall \mathbf{v_1}, \mathbf{w} \in V,\ a(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) = ([\sigma]\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + ([\nu]^2\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + (B\operatorname{rot}\mathbf{v_1}, \operatorname{rot}\mathbf{w}) + (\mathbf{v_1}, \mathbf{w});$$

$a$ est continue puisque

$$\forall \mathbf{v_1}, \mathbf{w} \in V,\ |a(\mathbf{v_1}, \mathbf{w})| \leq \left(|\sigma| + |\nu^2| + |B| + 1\right) ||\mathbf{v_1}||_V ||\mathbf{w}||_V,$$

et coercive car

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{v_1} \in V,\ a(\mathbf{v_1},\mathbf{v_1}) &= ([\sigma]\mathbf{v_1},\mathbf{v_1}) + ([\nu]^2\mathbf{v_1},\mathbf{v_1}) + (B\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v_1},\mathrm{rot}\,\mathbf{v_1}) + ||\mathbf{v_1}||_0^2 \\ &\geq ||\mathbf{v_1}||_0^2 + \frac{1}{1+|\tau|+|\eta^2|}||\mathrm{rot}\,\mathbf{v_1}||_0^2 \\ &\geq \min\left(1, \frac{1}{1+|\tau|+|\eta^2|}\right)||\mathbf{v_1}||_V^2 \\ &\geq \frac{1}{1+|\tau|+|\eta^2|}||\mathbf{v_1}||_V^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $B\,\tilde{\mathbf{u_2}}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{rot}\,(B\,\tilde{\mathbf{u_2}})$ est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$ et se prolonge de manière unique en un élément de $V'$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ dans $V$. Par conséquent, la forme linéaire $l$ définie sur V par

$$\forall \mathbf{w} \in V,\ l(\mathbf{w}) = (\tilde{\mathbf{u_1}},\mathbf{w}) + \langle \mathrm{rot}(B\tilde{\mathbf{u_2}}),\mathbf{w}\rangle\,,$$

(où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $V'$ et $V$) est continue car

$$\forall \mathbf{w} \in V,\ |l(\mathbf{w})| \leq (||\tilde{\mathbf{u_1}}||_0 + ||\mathrm{rot}(B\,\tilde{\mathbf{u_2}})||_{V'})\,||\mathbf{w}||_V.$$

Le théorème de Lax-Milgram prouve alors qu'il existe un unique élément $\mathbf{v_1}$ dans $V$ vérifiant :

$$\forall \mathbf{w} \in V, \quad a(\mathbf{v_1},\mathbf{w}) = l(\mathbf{w}),$$

*i.e.*

$$\forall \mathbf{w} \in V, \quad ([\sigma]\mathbf{v_1},\mathbf{w}) + ([\nu]^2\mathbf{v_1},\mathbf{w}) + (B\mathrm{rot}\,\mathbf{v_1},\mathrm{rot}\,\mathbf{w}) + (\mathbf{v1},\mathbf{w}) = (\tilde{\mathbf{u_1}},\mathbf{w}) + \langle \mathrm{rot}(B\tilde{\mathbf{u_2}}),\mathbf{w}\rangle\,.$$

Au sens des distributions, on obtient donc :

$$[\sigma]\mathbf{v_1} + [\nu]^2\mathbf{v_1} + \mathrm{rot}\,(B\mathrm{rot}\,\mathbf{v_1}) - \mathrm{rot}\,(B\tilde{\mathbf{u_2}}) + \mathbf{v_1} = \tilde{\mathbf{u_1}}. \tag{3.22}$$

Posons alors $\mathbf{v_2} := B\,(\tilde{\mathbf{u_2}} - \mathrm{rot}\,\mathbf{v_1})$ ; $\mathbf{v_2}$ est un élément de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et la relation (3.22) entraîne

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v_2} = [\sigma]\mathbf{v_1} + [\nu]^2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} - \tilde{\mathbf{u_1}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3),$$

ce qui montre que $\mathbf{v_2}$ appartient à $V$. Ainsi, le couple $(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}) \in V^2$ est solution de (3.20), (3.21). Maintenant, en posant :

$$\mathbf{v}_3 = [\nu]\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{v}_4 = [\eta]\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_4;$$

le vecteur $\mathbf{v} = (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\mathbf{v_4}) \in \mathcal{D}(A)$ est solution de (3.14) : $A$ est maximal.
On déduit alors du théorème de Hille-Yosida que le système $(\mathcal{P}_1)$ admet une unique solution $(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q})$ dans $\mathcal{C}^4$.

2) Nous allons maintenant établir l'estimation (3.12). La relation (3.13) s'écrit aussi :

$$\frac{d\,\mathbf{U}}{dt} + A\,\mathbf{U} = 0; \tag{3.23}$$

avec $\mathbf{U} = {}^t[\mathbf{E,H,P,Q}]$. On multiplie alors (3.23) par $\mathbf{U}$ et on intègre sur $\mathbb{R}^3$ ; ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\mathbf{U}(t)||_0^2 = -(A\mathbf{U}(t),\mathbf{U}(t)) \leq 0.$$

Par conséquent, la fonction $t \to ||\mathbf{U}(t)||_0$ est décroissante ; on a donc :

$$\forall t \geq 0, \quad ||\mathbf{U}(t)|| = ||\mathbf{E}(.,t), \mathbf{H}(.,t), \mathbf{P}(.,t), \mathbf{Q}(.,t)||_0 \leq ||\mathbf{U}(0)|| = ||\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0}||_0. \quad \square$$

Le second point du théorème précédent montre que la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{W}$, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{W}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \varepsilon_0 \left( |\mathbf{E}(.,t)|^2 + |\mathbf{P}(.,t)|^2 \right) + \mu_0 \left( |\mathbf{H}(.,t)|^2 + |\mathbf{Q}(.,t)|^2 \right) \right] \, d\mathbf{x},$$

est décroissante. Il serait intéressant d'étudier son comportement de façon plus fine, globalement ou localement dans le matériau absorbant. Le cas du vide est traité dans [117] et [131] où l'on montre que l'énergie est localement exponentiellement décroissante. Nous reviendrons sur cette question au chapitre suivant en apportant un élément de réponse dans le cas d'un couplage avec la condition de Silver-Müller.

## 3.4 Conditions aux limites artificielles

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la construction de conditions aux limites artificielles pour le système de Maxwell présenté dans ce chapitre. Ce système est une perturbation d'ordre 0 du système de Maxwell (d'ordre 1) posé dans le vide. Ainsi, on s'attend à obtenir comme condition la plus simple la condition dite de Silver-Müller :

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

En effet, cette condition correspond à la partie principale de toutes les conditions transparentes que l'on peut associer au système des équations de Maxwell posé dans le vide. Dans un premier temps, nous justifions cette conjecture. Ensuite, nous montrons que le développement de conditions d'ordre plus élevé n'est pas facile et demeure une question ouverte.
Nous proposons de construire des conditions pour une frontière plane localisée en $\{x = 0\}$. Les conditions artificielles s'obtiennent comme approximation d'une condition aux limites exacte qui exprime la transmission parfaite d'une onde de $\{x < 0\}$ dans $\{x > 0\}$. La condition exacte est appelée condition aux limites transparente. Elle peut s'obtenir en transformant le système en un système différentiel grâce à une transformée de Fourier-Laplace en $(y, z)$ et $t$. Nous notons désormais $(\widehat{E_x}, \widehat{E_y}, \widehat{E_z})$ le champ électrique résultant associé au champ magnétique $(\widehat{H_x}, \widehat{H_y}, \widehat{H_z})$ ; $k_y$, $k_z$ et $\omega$ les variables de Fourier associées respectivement à $y$, $z$ et $t$. Nous éliminons du système les transformées de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ définies respectivement par :

$$\widehat{\mathbf{P}} = \frac{[\nu]}{i\omega\varepsilon_0} \widehat{\mathbf{E}}, \qquad \widehat{\mathbf{Q}} = \frac{[\eta]}{i\omega\mu_0} \widehat{\mathbf{H}}.$$

Nous obtenons alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega\varepsilon_0\alpha_x \widehat{E_x} = ik_y \widehat{H_z} - ik_z \widehat{H_y} \\ i\omega\varepsilon_0\alpha_y \widehat{E_y} = ik_z \widehat{H_x} - \partial_x \widehat{H_z} \\ i\omega\varepsilon_0\alpha_z \widehat{E_z} = \partial_x \widehat{H_y} - ik_y \widehat{H_x} \\ i\omega\mu_0\beta_x \widehat{H_x} = ik_z \widehat{E_y} - ik_y \widehat{E_z} \\ i\omega\mu_0\beta_y \widehat{H_y} = \partial_x \widehat{E_z} - ik_z \widehat{E_x} \\ i\omega\mu_0\beta_z \widehat{H_z} = ik_y \widehat{E_x} - \partial_x \widehat{E_y} \end{array} \right.$$

avec :

$$\forall j = x, y, z; \qquad \alpha_j = 1 + \frac{\sigma_j}{i\omega\varepsilon_0} - \frac{\nu_j^2}{\omega^2\varepsilon_0^2} \qquad \text{et} \qquad \beta_j = 1 + \frac{\tau_j}{i\omega\mu_0} - \frac{\eta_j^2}{\omega^2\varepsilon_0^2}.$$

À l'aide des relations :

$$\widehat{E_x} = \frac{k_y\widehat{H_z} - k_z\widehat{H_y}}{\omega\varepsilon_0\alpha_x} \qquad \text{et} \qquad \widehat{H_x} = \frac{k_z\widehat{E_y} - k_y\widehat{E_z}}{\omega\mu_0\beta_x},$$

on élimine $\widehat{E_x}$ et $\widehat{H_x}$ du système précédent, ce qui permet de le transformer en un système différentiel en $x$. Ainsi, si l'on note

$$\widehat{\mathbf{E}_\perp} = (\widehat{E_y}, \widehat{E_z}) \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathbf{H}_\perp} = (\widehat{H_y}, \widehat{H_z}),$$

le couple $(\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp})$ est solution du système différentiel :

$$\partial_x \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix};$$

où $M$ est la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 0_2 & M_{12} \\ M_{21} & 0_2 \end{bmatrix},$$

et $M_{12}$, $M_{21}$ sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes :

$$M_{12} = \delta_\alpha \begin{bmatrix} k_y k_z & \dfrac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_z - k_y^2 \\ \\ k_z^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_y & -k_y k_z \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \delta_\beta \begin{bmatrix} -k_y k_z & k_y^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\beta_x\alpha_z \\ \\ \dfrac{\omega^2}{c^2}\beta_x\alpha_y - k_z^2 & k_y k_z \end{bmatrix};$$

avec

$$\delta_\alpha = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\alpha_x}, \qquad \delta_\beta = \frac{1}{i\omega\mu_0\beta_x}, \qquad \text{et} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

En remplaçant $\alpha_j$ et $\beta_j$ $(j = x, y, z)$ par 1, on retrouve les équations de Maxwell posées dans le vide. Dans ce cas, on détermine (voir [16] ou [56]) une condition transparente sortante en projetant le champ $(\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp})$ sur le sous-espace propre associé à la valeur propre dont la partie imaginaire est positive dans le cône de propagation.
À l'aide de Maple, nous calculons le polynôme caractéristique de $M$. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}\chi_M(X) = X^4 &+ \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_x\left(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y\right) - k_y^2\left(\beta_x\alpha_y + \alpha_x\beta_y\right) - {k_z}^2\left(\alpha_x\beta_z + \beta_x\alpha_z\right)}{\alpha_x\beta_x} X^2 \\ &+ \frac{1}{\alpha_x\beta_x}\Big[\alpha_y\beta_y{k_y}^4 + \alpha_z\beta_z{k_z}^4 + (\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)k_y^2k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\alpha_y\beta_y(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x)k_y^2 \\ &\qquad - \frac{\omega^2}{c^2}\alpha_z\beta_z(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x)k_z^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\alpha_x\alpha_y\alpha_z\beta_x\beta_y\beta_z\Big].\end{aligned}$$

L'expression de ce polynôme est assez compliquée. À l'aide de Maple, nous pouvons calculer ses racines mais les expressions de ces valeurs propres sont très difficilement manipulables. Pour s'en convaincre, on pourra consulter la partie 3.5 dans laquelle nous donnons ces valeurs propres. Cependant, dans le cas général, les racines de $\chi_M$ sont solutions d'une équation bicarrée qui admet quatre racines complexes distinctes $\{\pm a, \pm b\}$ (voir la partie 3.5). La matrice $M$ est donc diagonalisable. Nous supposons que $a$ et $b$ ont une partie imaginaire positive. Ces deux valeurs propres sont alors associées aux ondes sortantes (se propageant de $\{x < 0\}$ vers $\{x > 0\}$). Nous formons maintenant la matrice de passage $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_4(S^0)$ (d'inverse $\mathcal{P}^{-1} \in \mathcal{M}_4(S^0)$) de la base canonique à une base de vecteurs propres $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_{-a}, \mathbf{e}_{-b}\}$. La matrice $\mathcal{P}$ est le symbole d'un opérateur $\mathbb{P}$ de $OPS^0$ et son inverse $\mathbb{Q} \in OPS^0$ a pour symbole principal $\mathcal{P}^{-1}$. La condition transparente sortante, qui exprime la parfaite transmission de $\{x < 0\}$ dans $\{x > 0\}$, est obtenue en imposant que les composantes rentrantes de $\mathbf{V}_\perp = \mathbb{Q}(\mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp)$ soient nulles à l'interface $\{x = 0\}$. Cela revient à imposer, dans le domaine de Fourier :

$$(\mathbf{V}_\perp)_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{V}_\perp)_2 = 0 \quad \text{en} \quad x = 0.$$

Autrement dit, cette condition transparente s'obtient en imposant qu'à l'interface $\{x = 0\}$, la projection des champs électromagnétiques sur les sous-espaces propres $E_{-a}$ et $E_{-b}$ est nulle. La base de vecteurs propres $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_{-a}, \mathbf{e}_{-b}\}$ exprime le symbole $\mathcal{P}$ de $\mathbb{P}$. En général, inverser $\mathcal{P}$ ne fait qu'exprimer le symbole principal de $\mathbb{Q}$. En effet, pour déterminer le symbole de $\mathbb{Q}$, on utilise la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels (voir chapitre 1) qui permet d'obtenir $\mathbb{Q}$ grâce à un développement asymptotique de son symbole. Ainsi, on considère une troncature du symbole de $\mathbb{Q}$ et la condition artificielle repose sur une approximation de la condition transparente. Si l'on réfère aux calculs reportés dans la partie 3.5, on constate que cette méthode s'avère difficile à mettre en pratique ici. C'est pour cette raison que nous avons cherché à développer une autre idée.

Comme $\mathbb{Q}$ est explicité *via* son symbole, on peut aussi chercher à déterminer explicitement les termes du développement asymptotique en identifiant les degrés d'homogénéité de chacun des symboles (en utilisant le fait que les opérateurs considérés sont classiques). Nous allons voir que cette approche, qui nécessite plus de calculs, a l'avantage de montrer rigoureusement quel est le terme prépondérant dans la condition transparente. En particulier, on retrouve directement la condition de Silver-Müller, qui est la condition la plus simple obtenue lorsque $[\sigma] = [\tau] = [\eta] = [\nu] = 0$. Afin de développer cette approche, nous introduisons la matrice $M^1$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par :

$$M^1 = \begin{bmatrix} 0_2 & \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} M^1_{12} \\ -\frac{1}{i\omega\mu_0} M^1_{12} & 0_2 \end{bmatrix},$$

où :

$$M^1_{12} = \begin{bmatrix} k_y k_z & \dfrac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \\ & \\ k_z^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2} & -k_y k_z \end{bmatrix}.$$

Nous démontrons alors le résultat suivant.

**Proposition 3.4.1** *La matrice $M^0 := M - M^1$ est à coefficients dans $S^0$.*

**Preuve**. Étant donné la structure des matrices $M$ et $M^1$, il suffit d'examiner les coefficients de $M^0_{12} := M_{12} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} M^1_{12}$. Tout d'abord, les coefficients diagonaux de cette matrice s'écrivent :

$$\pm k_y k_z (\delta_\alpha - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}) = \pm \frac{k_y k_z}{i\omega\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\alpha_x} - 1 \right).$$

Or, nous avons :

$$\frac{1}{\alpha_x} - 1 = \frac{i\dfrac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_0} + \dfrac{\nu_x^2}{\omega^2\varepsilon_0^2}}{1 - i\dfrac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_0} - \dfrac{\nu_x^2}{\omega^2\varepsilon_0^2}}$$

Dans l'écriture ci-dessus, le numérateur est un symbole de $S^{-1}$ et le dénominateur est un symbole de $S^0$. Par conséquent, $\alpha_x^{-1} - 1$ est un symbole de $S^{-1}$, donc $\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}(\alpha_x^{-1} - 1)$ est un élément de $S^{-2}$. Les coefficients diagonaux de $M^0_{12}$ s'obtiennent en multipliant $\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}(\alpha_x^{-1} - 1)$ par $k_y k_z$, ils appartiennent donc à $S^0$. Par ailleurs, les termes extra-diagonaux de $M^0_{12}$ s'écrivent :

$$\delta_\alpha \left( \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_x \beta_z - k_y^2 \right) - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right),$$

et

$$\delta_\alpha \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_x \beta_y \right) - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right).$$

Ces deux termes sont de la même forme, on peut donc se contenter d'étudier le premier, que nous notons $m_{12}$ :

$$m_{12} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\alpha_x} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_x \beta_z - k_y^2 \right) - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) = \frac{\omega}{i\varepsilon_0 c^2} (\beta_z - 1) - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} k_y^2 \left( \frac{1}{\alpha_x} - 1 \right).$$

On a vu que $\alpha_x^{-1} - 1$ appartient à $S^{-1}$ donc $\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} k_y^2 (\alpha_x^{-1} - 1)$ est un élément de $S^0$. De plus,

$$\beta_z - 1 = \frac{\sigma_z}{i\omega\varepsilon_0} - \frac{\nu_z^2}{\omega^2\varepsilon_0^2};$$

donc $\beta_z - 1$ est dans $S^{-1}$, ce qui entraîne que $\frac{\omega}{i\varepsilon_0 c^2}(\beta_z - 1)$ (et donc $m_{12}$) appartient à $S^0$. □

La proposition 3.4.1 montre que la partie principale du système différentiel vérifié par ${}^t[\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp}]$ est représentée par la matrice $M^1$. Cette matrice correspond également à la matrice obtenue en appliquant la transformée de Fourier-Laplace au système de Maxwell posé dans le vide : on retrouve le fait que le modèle absorbant considéré est une perturbation d'ordre zéro du système de Maxwell puisque la matrice résiduelle $M^0$ est à coefficients dans $S^0$. Ainsi, cette proposition laisse présager que les deux systèmes vont admettre la même CLA d'ordre le plus bas (1/2 d'après [5]), à savoir la condition de Silver-Müller rappelée plus haut. Dans la suite, nous justifions cette affirmation.

D'après [52], les CLA peuvent s'obtenir en découplant les champs tangentiels à $\Sigma = \{x = 0\}$ en une partie sortant dans $\Sigma = \{x > 0\}$ et une partie entrant dans $\Sigma = \{x < 0\}$. Ce découplage est régi par un opérateur $\Pi$ qui, le plus souvent, est pseudo-différentiel, global en temps et en espace. Les CLA résultent alors de l'approximation de cet opérateur, cette approximation étant menée dans le but de rendre aisée et peu coûteuse l'intégration de la CLA dans la méthode numérique. Afin de découpler les champs entrants et sortants, on projette la solution le long des bicaractéristiques associées au système. Dans le cas simple du système de Maxwell posé dans le vide [16], les projections sont caractérisées à partir des vecteurs propres de $M^1$. Dans notre cas, l'étude de la matrice est plus compliquée car $M^1$ est perturbée par la matrice $M^0$ et nous avons déjà remarqué que le calcul direct des valeurs propres de $M$ n'est pas simple. Nous proposons, comme alternative, de commencer par diagonaliser $M^1$. Comme $M^1$ est la partie principale du système complet, nous sommes sûrs d'obtenir en première approximation de la condition transparente la condition la plus simple associée au système complet. Nous établissons alors le résultat suivant.

**Théorème 3.4.2** *Il existe une matrice inversible $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{M}_4(S^0)$, d'inverse dans $\mathcal{M}_4(S^0)$, telle que $\widehat{\mathbf{V}} := \mathcal{P}_0^{-1}\,{}^t[\widehat{\boldsymbol{E}_\perp}, \widehat{\boldsymbol{H}_\perp}]$ est solution du système différentiel :*

$$\partial_x \widehat{\mathbf{V}} = \mathcal{D}_1 \widehat{\mathbf{V}} + \mathcal{R}_0 \widehat{\mathbf{V}},$$

*avec $\mathcal{D}_1 \in diag_4(S^1)$ et $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{M}_4(S^0)$.*

**Preuve**. D'après [16], les valeurs propres de $M^1$ sont les racines du polynôme :

$$\chi_{M^1}(\lambda) = \left(\lambda^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2\right)^2.$$

La matrice $M^1$ admet donc deux valeurs propres doubles de signe opposé. On souhaite caractériser la propagation au voisinage de $\{x = 0\}$, on ne considère donc que des fréquences $(k_y, k_z, \omega)$ dans le cône de propagation :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2 > 0.$$

Ainsi, les deux valeurs propres doubles propagatives $\lambda_+$ et $\lambda_-$ sont données par :

$$\lambda_+ = i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_- = -\lambda_+.$$

Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_+}$ et $E_{\lambda_-}$ sont de dimension deux et on a $E_{\lambda_+} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_{+,1}; \mathbf{e}_{+,2}\}$ et $E_{\lambda_-} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_{-,1}; \mathbf{e}_{-,2}\}$, avec :

$$\mathbf{e}_{+,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_z^2 - \omega^2/c^2}{k_y k_z} \\ \frac{i\omega\varepsilon_0\lambda_+}{k_y k_z} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{+,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\omega\mu_0\lambda_+}{k_y k_z} \\ \frac{k_y^2 - \omega^2/c^2}{k_y k_z} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{-,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\omega\mu_0\lambda_+}{k_y k_z} \\ \frac{k_y^2 - \omega^2/c^2}{k_y k_z} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{-,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_z^2 - \omega^2/c^2}{k_y k_z} \\ -\frac{i\omega\varepsilon_0\lambda_+}{k_y k_z} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{M}_4(S^0)$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, on a :

$$\mathcal{P}_0^{-1} M^1 \, \mathcal{P}_0 = \mathcal{D}_1 = \mathrm{diag}\,(\lambda_+, \lambda_+, \lambda_-, \lambda_-) \in \mathcal{M}_4(S^1).$$

Posons maintenant $\widehat{\mathbf{V}} := \mathcal{P}_0^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix}$. Comme $\mathcal{P}_0$ ne dépend pas de $x$, nous pouvons écrire :

$$\partial_x \widehat{\mathbf{V}} = \mathcal{P}_0^{-1} \partial_x \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix};$$

d'où :

$$\partial_x \widehat{\mathbf{V}} = \mathcal{P}_0^{-1} M^1 \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix} + \mathcal{P}_0^{-1} M^0 \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}_\perp} \\ \widehat{\mathbf{H}_\perp} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le champ $\widehat{\mathbf{V}}$ est solution du système :

$$\partial_x \widehat{\mathbf{V}} = \mathcal{D}\widehat{\mathbf{V}} + \mathcal{P}_0^{-1} M^0 \mathcal{P}_0 \, \widehat{\mathbf{V}},$$

ce qui achève la preuve du théorème puisque $\mathcal{D} \in \mathrm{diag}_4(S^1)$ et $\mathcal{R}_0 := \mathcal{P}_0^{-1} M^0 \mathcal{P}_0 \in \mathcal{M}_4(S^0)$. $\square$

Dans [16], on obtient un système découplé car la matrice $M^0$ est nulle (donc $R_0 = 0$). Dans ce cas, si on note $\Pi$ l'opérateur intégral de Fourier dont le symbole est donné par la matrice $\mathcal{P}_0^{-1}$, on obtient la condition exacte sortante en imposant que la projection de ${}^t[\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp}]$ sur le sous-espace propre associé à $\lambda_+$ soit nulle. Pour le système complet (associé à $M$), cet argument ne va donner qu'une approximation de la condition exacte. En effet, pour obtenir une condition exacte, nous devrions projeter sur les sous-espaces propres associés à $M$ (comme cela a été décrit au début de ce paragraphe). Cependant, la différence entre les deux conditions est donnée par un opérateur d'ordre -1, on peut donc en déduire que la condition artificielle la plus simple est la même pour le système principal ($M_1$) et pour le système complet ($M$).

**Théorème 3.4.3** *La condition aux limites artificielle la plus simple associée au modèle absorbant $(\mathcal{P})$ s'écrit :*

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \qquad \textit{en} \;\; x = 0,$$

*où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unitaire sortante à $\{x = 0\}$, l'intérieur étant représenté par $\{x < 0\}$.*

**Preuve**. Nous avons vu que cette condition s'obtient en imposant que la projection de ${}^t[\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp}]$ sur le sous-espace propre $E_{\lambda_+}$ soit nulle. Notons $\mathcal{R}$ la matrice de ce projecteur dans la base $(\mathbf{e}_{+,1}, \mathbf{e}_{+,2}, \mathbf{e}_{-,1}; \mathbf{e}_{-,2})$. On a :

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_{+,1}) = \mathbf{e}_{+,1}, \qquad \mathcal{R}(\mathbf{e}_{+,2}) = \mathbf{e}_{+,2}, \qquad \mathcal{R}(\mathbf{e}_{-,1}) = \mathcal{R}(\mathbf{e}_{-,2}) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{0,+},$$

où $\mathcal{P}_{0,+}$ est la matrice définie par :

$$\mathcal{P}_{0,+} = [\mathbf{e}_{+,1}, \mathbf{e}_{+,2}, \mathbf{0}, \mathbf{0}].$$

On obtient donc :

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}_{0,+}\mathcal{P}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{ik_yk_z}{2\varepsilon_0\omega\lambda_+} & \frac{\omega^2/c^2-k_y^2}{2i\varepsilon_0\omega\lambda_+} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{k_z^2-\omega^2/c^2}{2i\varepsilon_0\omega\lambda_+} & \frac{ik_yk_z}{2\varepsilon_0\omega\lambda_+} \\ \frac{ik_yk_z}{2\mu_0\omega\lambda_+} & \frac{k_y^2-\omega^2/c^2}{2i\mu_0\omega\lambda_+} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\omega^2/c^2-k_z^2}{2i\mu_0\omega\lambda_+} & -\frac{ik_yk_z}{2\mu_0\omega\lambda_+} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour l'approximation, on fait tendre $\omega$ vers l'infini (on approche donc $\lambda_+$ par $i\omega/c$ dans $\mathcal{R}$) et la condition que nous recherchons s'écrit alors, dans le domaine de Fourier :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\varepsilon_0 c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu_0 c} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\mu_0 c} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{E_y} \\ \widehat{E_z} \\ \widehat{H_y} \\ \widehat{H_z} \end{bmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\widehat{E_y} - \widehat{E_z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\widehat{E_z} + \widehat{E_y} = 0.$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse aux relations précédentes, on retrouve bien la condition de Silver-Müller. □

Afin d'obtenir des conditions d'ordre plus élevé, on peut penser à adopter la démarche suivie dans [5]. Cette idée a été initialement utilisée dans [120] en vue d'étudier la propagation des singularités pour des systèmes hyperboliques. Ensuite, dans [119], les auteurs ont montré que cette approche est bien adaptée à la construction de conditions absorbantes pour le système des équations de Maxwell dans le vide au voisinage d'une frontière courbe. Enfin, cette idée a été reprise dans [5] pour développer des conditions de radiation d'ordre arbitraire pour l'électromagnétisme. Notons $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{R}_0$ les opérateurs pseudo-différentiels de symboles respectifs $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{M}_4(S^1)$ et $\mathcal{R}_0 = \mathcal{P}_0^{-1}M^0\mathcal{P}_0$. Le champ de vecteurs $\mathbf{V}$ est alors solution de :

$$\partial_x \mathbf{V} = \mathbb{D}_1\mathbf{V} + \mathbb{R}_0\mathbf{V}.$$

Nous introduisons maintenant une inconnue auxiliaire $\mathbf{V_1}$ liée au champ $\mathbf{V}$ par la relation $\mathbf{V_1} = (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbf{V}$ où $\mathbb{I}$ désigne l'identité et $\mathbb{K}_{-1}$ un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $\mathcal{K}_{-1}$ est déterminé de sorte que $\widehat{\mathbf{V_1}}$ soit solution de :

$$\partial_x \widehat{\mathbf{V_1}} = (\mathcal{D}_1 + \mathcal{M}_0)\widehat{\mathbf{V_1}} + \mathcal{R}_{-1}\widehat{\mathbf{V_1}};$$

avec $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{M}_4(S^0)$ et $\mathcal{R}_{-1} \in \mathcal{M}_4(S^{-1})$.

**Proposition 3.4.4** *Il existe une matrice $\mathcal{K}_{-1}$ dans $\mathcal{M}_4(S^{-1})$ telle que la matrice*

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{P}_0^{-1}M^0\mathcal{P}_0$$

*soit diagonale par blocs.*

**Preuve**. Notons $(k_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ les coefficients de la matrice $\mathcal{K}_{-1}$ que l'on recherche et $(r_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ les coefficients de $\mathcal{R}_0 = \mathcal{P}_0^{-1} M^0 \mathcal{P}_0$. Comme

$$\mathcal{D}_1 = \mathrm{diag}\,(\lambda_+, \lambda_+, -\lambda_+, -\lambda_+),$$

on a :

$$\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\lambda_+ k_{13} & -2\lambda_+ k_{14} \\ 0 & 0 & -2\lambda_+ k_{23} & -2\lambda_+ k_{24} \\ 2\lambda_+ k_{31} & 2\lambda_+ k_{32} & 0 & 0 \\ 2\lambda_+ k_{41} & 2\lambda_+ k_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où :

$$\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{R}_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} - 2\lambda_+ k_{13} & r_{14} - 2\lambda_+ k_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} - 2\lambda_+ k_{23} & r_{24} - 2\lambda_+ k_{24} \\ r_{31} + 2\lambda_+ k_{31} & r_{32} + 2\lambda_+ k_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} + 2\lambda_+ k_{41} & r_{42} + 2\lambda_+ k_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, nous pouvons définir une matrice $\mathcal{K}_{-1}$ de $\mathcal{M}_4(S^{-1})$ en posant :

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{44} = 0, \quad k_{12} = k_{21} = k_{34} = k_{43} = 0, \tag{3.24}$$

$$k_{31} = -\frac{r_{31}}{2\lambda_+}, \quad k_{32} = -\frac{r_{32}}{2\lambda_+}, \quad k_{41} = -\frac{r_{41}}{2\lambda_+}, \quad k_{42} = -\frac{r_{42}}{2\lambda_+}, \tag{3.25}$$

$$k_{13} = \frac{r_{13}}{2\lambda_+}, \quad k_{14} = \frac{r_{14}}{2\lambda_+}, \quad k_{23} = \frac{r_{23}}{2\lambda_+}, \quad k_{24} = \frac{r_{24}}{2\lambda_+}. \tag{3.26}$$

La matrice $\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{R}_0$ est alors diagonale par blocs puisque :

$$\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{R}_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix},$$

ce qui termine la démonstration. □

Nous déterminons maintenant les coefficients de la matrice $\mathcal{K}_{-1}$ que nous venons de définir.

**Proposition 3.4.5** *Les coefficients de la matrice $\mathcal{K}_{-1}$ définie dans la proposition 3.4.4 sont donnés par :*

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{44} = 0, \quad k_{12} = k_{21} = k_{34} = k_{43} = 0,$$

$$k_{31} = -k_{24} = -\frac{\varepsilon_0\omega^2}{4\lambda_+}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_y\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_y - 1)\right]$$

$$k_{42} = -k_{13} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\lambda_+}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_z\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_z - 1)\right]$$

$$k_{41} = k_{14} = -\frac{1}{4\lambda_+}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\alpha_y + \alpha_z - \frac{1}{\alpha_x} - \frac{1}{\beta_x}\right) + k_y^2\left(\frac{1}{\alpha_x} - \alpha_y\right) + k_z^2\left(\frac{1}{\alpha_x} - \alpha_z\right)\right]$$

**Preuve**. À l'aide de Maple, nous calculons les coefficients de $\mathcal{R}_0$ dont nous avons besoin pour définir $\mathcal{K}_{-1}$ :

$$\begin{aligned}
r_{31} = r_{24} &= \frac{\varepsilon_0\omega^2}{2}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_y\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_y - 1)\right],\\
r_{42} = r_{13} &= \frac{\mu_0\omega^2}{2}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_z\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_z - 1)\right],\\
r_{41} = -r_{14} &= \frac{1}{2\lambda_+}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\alpha_y + \alpha_z - {\alpha_x}^{-1} - {\beta_x}^{-1}\right) + k_y^2\left({\alpha_x}^{-1} - \alpha_y\right) + k_z^2\left({\alpha_x}^{-1} - \alpha_z\right)\right],\\
r_{32} = -r_{23} &= \frac{1}{2\lambda_+}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\beta_y + \beta_z - {\alpha_x}^{-1} - {\beta_x}^{-1}\right) + k_y^2\left({\beta_x}^{-1} - \beta_y\right) + k_z^2\left({\beta_x}^{-1} - \beta_z\right)\right].
\end{aligned}$$

Grâce à (3.24), (3.25) et (3.26), nous obtenons alors les coefficients de $\mathcal{K}_{-1}$ :

$$\begin{aligned}
&k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{44} = 0, \quad k_{12} = k_{21} = k_{34} = k_{43} = 0,\\
&k_{31} = -k_{24} = -\frac{r_{31}}{2\lambda_+} = -\frac{\varepsilon_0\omega^2}{4\lambda_+}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_y\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_y - 1)\right],\\
&k_{42} = -k_{13} = -\frac{r_{42}}{2\lambda_+} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\lambda_+}\left[\frac{1}{i\omega\beta_x}(\alpha_z\beta_x - 1) + \frac{1}{i\omega\alpha_x}(\alpha_x\beta_z - 1)\right],\\
&k_{41} = k_{14} = -\frac{r_{41}}{2\lambda_+}\\
&\qquad = -\frac{1}{4\lambda_+}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\alpha_y + \alpha_z - {\alpha_x}^{-1} - {\beta_x}^{-1}\right) + k_y^2\left({\alpha_x}^{-1} - \alpha_y\right) + k_z^2\left({\alpha_x}^{-1} - \alpha_z\right)\right]. \quad \square
\end{aligned}$$

Nous déduisons de la proposition 3.4.4 le résultat suivant.

**Proposition 3.4.6** *Soit $\mathcal{K}_{-1}$ une matrice de $\mathcal{M}_4(S^{-1})$ telle que $\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{P}_0^{-1}M^0\mathcal{P}_0$ soit diagonale par blocs et $\mathbb{K}_{-1}$ l'opérateur de symbole $\mathcal{K}_{-1}$. Alors, il existe un opérateur $\mathbb{R}_{-1}$ de symbole $\mathcal{R}_{-1} \in \mathcal{M}_4(S^{-1})$ tel que $\mathbf{V_1} := (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbf{V}$ est solution du système :*

$$\partial_x\mathbf{V_1} = (\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_0)\mathbf{V_1} + \mathbb{R}_{-1}\mathbf{V_1};$$

*où $\mathbb{D}_0$ est l'opérateur de symbole $\mathcal{D}_0 = \mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{P}_0^{-1}M^0\mathcal{P}_0 \in \mathcal{M}_4(S^0)$.*

**Preuve**. Posons $\mathbf{V_1} := (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbf{V}$, on a :

$$\partial_x\mathbf{V_1} = \partial_x\mathbb{K}_{-1}\mathbf{V} + (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\partial_x\mathbf{V}.$$

Comme $\partial_x\mathbf{V} = \mathbb{D}_1\mathbf{V} + \mathbb{R}_0\mathbf{V}$, cela entraîne :

$$\partial_x\mathbf{V_1} = \partial_x\mathbb{K}_{-1}(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})^{-1}\mathbf{V_1} + (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbb{D}_1(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})^{-1}\mathbf{V_1} + (\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbb{R}_0(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})^{-1}\mathbf{V_1}.$$

L'opérateur $\mathbb{K}_{-1}$ appartient à $OPS^{-1}$, donc $\partial_x\mathbb{K}_{-1}$ est aussi un élément de $OPS^{-1}$. Par ailleurs, on a, pour tout opérateur $\mathbb{P}$ :

$$(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})\mathbb{P}(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})^{-1} = \mathbb{P} + [\mathbb{K}_{-1}, \mathbb{P}]\,(\mathbb{I} + \mathbb{K}_{-1})^{-1},$$

où $[\mathbb{K}_{-1}, \mathbb{P}]$ désigne le commutateur $\mathbb{K}_{-1}\mathbb{P} - \mathbb{P}\,\mathbb{K}_{-1}$. Dans le cas général d'opérateurs scalaires, si l'on note $p$ l'ordre de $\mathbb{P}$, ce commutateur est d'ordre $p-2$. Étant donné qu'il s'agit d'opérateurs matriciels, $[\mathbb{K}_{-1}, \mathbb{P}]$ est ici d'ordre $p-1$ et admet pour symbole principal $\mathcal{K}_{-1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{K}_{-1}$, où $\mathcal{P}$ désigne le symbole de $\mathbb{P}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\partial_x \mathbf{V_1} = \mathbb{D}_1 \mathbf{V_1} + \left\{[\mathbb{K}_{-1}, \mathbb{D}_1]\,(\mathbb{I}+\mathbb{K}_{-1})^{-1} + \mathbb{R}_0\right\} \mathbf{V_1} \\ + \left\{\ \left\{\ [\mathbb{K}_{-1}, \mathbb{R}_0]\,(\mathbb{I}+\mathbb{K}_{-1})^{-1} + \partial_x \mathbb{K}_{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{K}_{-1})^{-1}\right\}\right\} \mathbf{V_1}.\end{aligned}$$

L'opérateur entre accolades est d'ordre 0 et de symbole principal $\mathcal{D}_0 = \mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1} + \mathcal{R}_0$. De plus, l'opérateur entre doubles accolades est d'ordre -1, ce qui termine la preuve. $\square$

La méthode que nous proposons ne conduit pas à la diagonalisation des termes d'ordre supérieur. Nous n'obtenons qu'une forme diagonale par blocs car les valeurs propres de la partie principale sont doubles. La décomposition du système à l'aide de matrices à coefficients homogènes transforme le système qui se comporte comme un système hyperbolique (les valeurs propres sont multiples alors qu'il est strictement hyperbolique). Il serait donc nécessaire d'adapter cette approche de façon à conserver le caractère strictement hyperbolique du système.

Le fait de ne pas diagonaliser les termes d'ordre 0 rend difficile l'interprétation de l'opérateur $(\mathbb{I}+\mathbb{K}_{-1})\mathbb{Q}$. En effet, cet opérateur lie le champ électromagnétique à l'inconnue auxiliaire $\boldsymbol{V_1}$ qui est solution d'une équation de transport partiellement découplée. En imposant :

$$\left((\mathbb{I}+\mathbb{K}_{-1})\mathbb{Q}\left(\widehat{\mathbf{E}_\perp}, \widehat{\mathbf{H}_\perp}\right)\right)_{1,2} = 0,$$

on obtient une condition d'ordre supérieur mais il est difficile de l'interpréter en terme de projection. Afin de diagonaliser les temes d'ordre 0, il faudrait modifier la relation liant $\widehat{\mathbf{V_1}}$ à $\widehat{\mathbf{V}}$. En effet, on ne peut pas rendre $\mathcal{D}_0$ diagonale puisque la matrice $\mathcal{K}_{-1}\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{K}_{-1}$ est anti-diagonale par blocs. Ainsi, $\mathcal{D}_0$ est diagonale si :

$$r_{12} = r_{21} = r_{34} = r_{43} = 0,$$

ce qui n'est pas le cas en général. On se retrouve confronté à un problème déjà rencontré pour le système de Maxwell tridimensionnel écrit au voisinage d'une frontière courbe [119].

## 3.5 Complément : valeurs propres de la matrice M

À l'aide de Maple, on obtient les quatre valeurs propres $\{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2\}$ de la matrice $M$, où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont données par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\alpha_x\beta_x}\sqrt{2\alpha_x\beta_x\left[k_y^2\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + k_z^2\left(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_x\left(\alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y\right) + a\right]},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\alpha_x\beta_x}\sqrt{2\alpha_x\beta_x\left[k_y^2\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + k_z^2\left(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_x\left(\alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y\right) - a\right]};$$

avec :

$$\begin{aligned} a = \Big[ & {k_y}^4\left(\alpha_y^2\beta_x^2 + \alpha_x^2\beta_y^2 - 2\alpha_x\beta_x\alpha_z\beta_z\right) + {k_z}^4\left(\alpha_z^2\beta_x^2 + \alpha_x^2\beta_z^2 - 2\alpha_x\beta_x\alpha_z\beta_z\right) \\ & + \left[2\alpha_x\beta_y\left(\alpha_x\beta_z - \alpha_z\beta_x\right) + 2\alpha_z\beta_x\left(\alpha_y\beta_x - \alpha_x\beta_y\right)\right]k_y^2k_z^2 \\ & + 2\frac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_x\left(\alpha_x\alpha_y\beta_y\beta_z + \alpha_y\alpha_z\beta_x\beta_y - \alpha_y^2\beta_x\beta_z - \alpha_x\alpha_z\beta_y^2\right)k_y^2 \\ & + 2\frac{\omega^2}{c^2}\alpha_x\beta_x\left(\alpha_x\alpha_z\beta_y\beta_z + \alpha_y\alpha_z\beta_x\beta_z - \alpha_x\alpha_y\beta_z^2 - \alpha_z^2\beta_x\beta_y\right)k_z^2 \\ & + \frac{\omega^4}{c^4}\alpha_x^2\beta_x^2\left(\alpha_y^2\beta_z^2 + \alpha_z^2\beta_y^2 - \alpha_y\alpha_z\beta_y\beta_z\right)\Big]^{1/2} \end{aligned}$$

# Chapitre 4

# Équations de Maxwell dans des couches fortement absorbantes

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet du couplage du système présenté au chapitre 3 avec la condition de Silver-Müller. Le contexte est différent de celui du chapitre 3 puisque nous travaillons ici dans un domaine borné. Dans un premier temps, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution dans un cadre hilbertien. Ensuite, nous étudions le comportement en temps long de la solution. Enfin, nous démontrons, sous une hypothèse géométrique convenable, la décroissance exponentielle en temps de la solution.

## 4.1 Caractère bien posé

On suppose que $\Omega$ est un polyèdre lipschitzien convexe borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\Gamma$ est simplement connexe. Soit $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire, défini en tout point de $\Gamma$ et orienté vers l'extérieur de $\Omega$. Pour simplifier, nous supposons que $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ et nous nous intéressons au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [\nu]\mathbf{P} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times]0,\infty[, \\ \partial_t \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [\eta]\mathbf{Q} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times]0,\infty[, \\ \partial_t \mathbf{P} - [\nu]\mathbf{E} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times]0,\infty[, \\ \partial_t \mathbf{Q} - [\eta]\mathbf{H} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times]0,\infty[, \\ \mathbf{E}(\mathbf{x},0) = \mathbf{E_0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{H}(\mathbf{x},0) = \mathbf{H_0}(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{P}(\mathbf{x},0) = \mathbf{P_0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{Q}(\mathbf{x},0) = \mathbf{Q_0}(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \Omega, \\ (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma\times]0,\infty[. \end{cases} \tag{4.1}$$

Cette formulation a été justifiée au chapitre 3 dans lequel nous avons montré que la condition de Silver-Müller, posée sur la frontière $\Gamma$, est une condition artificielle pour le modèle considéré. Les espaces de Sobolev d'ordre $s$ sont notés $H^s(\Omega)$ et $H^t(\Gamma)$ et ils sont définis pour $s$ et $t$ dans $\mathbb{R}$. On peut consulter par exemple [64] pour plus de détails sur ces espaces. Nous introduisons l'espace fonctionnel :

$$\mathbb{V} = \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega),$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme du graphe. On note $\mathbb{L}^2(\Omega)$ l'espace produit $\mathbb{L}^2(\Omega)^3 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et dans tout ce chapitre, on utilise cette police de caractère pour désigner n'importe quel espace produit. Comme d'habitude, $\mathbb{H}(\mathrm{rot},\Omega)$ désigne l'espace des vecteurs $\mathbf{u}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tels que $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Dans le cas d'un domaine régulier, on montre dans [109] que les traces tangentielles $\gamma_\tau(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})_{|\Gamma}$ et $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n}_{|\Gamma}$ sont bien définies pour tout $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{H}(\mathrm{rot},\Omega)$ et que l'on a :

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n}_{|\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}_\Gamma,\Gamma), \qquad (\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})_{|\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma),$$

où

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}_\Gamma,\Gamma) = \{\mathbf{w}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma} = 0, \mathrm{rot}_\Gamma\,\mathbf{w}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

et

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma) = \{\mathbf{w}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma} = 0, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{w}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}.$$

L'opérateur $\mathrm{rot}_\Gamma$ est défini comme la trace normale du rotationel et on construit la divergence surfacique à l'aide de la formule :

$$\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{w} = \mathrm{rot}_\Gamma\,(\mathbf{n}\wedge\mathbf{w}).$$

Lorsque $\Omega$ est un polyèdre, la caractérisation des traces de $\mathbb{H}(\mathrm{rot},\Omega)$ a été donnée dans [29, 122] à partir de différentes formulations et récemment, les résultats de [109] ont été étendus à des domaines lipschitziens. Nous renvoyons à [30] pour les démonstrations. Dans [31], on montre aussi que, lorsque $\Gamma$ est simplement connexe, on peut appliquer la décomposition de Hodge :

$$\begin{aligned} H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma) &= \nabla_\Gamma\,\mathcal{H}(\Gamma)\oplus\mathbf{rot}_\Gamma\,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\\ H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}_\Gamma,\Gamma) &= \mathbf{rot}_\Gamma\,\mathcal{H}(\Gamma)\oplus\nabla_\Gamma\,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\end{aligned}$$

où $\mathcal{H}(\Gamma) = \{\phi\in H^1(\Gamma),\ \Delta_\Gamma\phi\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$. Ainsi, si l'on considère un vecteur tangentiel $\mathbf{u}$ qui appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)\cap H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}_\Gamma,\Gamma)$, il existe $\phi\in\mathcal{H}(\Gamma)$ et $\psi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tels que :

$$\mathbf{u} = \nabla_\Gamma\phi + \mathbf{rot}_\Gamma\psi$$

et comme $\mathrm{rot}_\Gamma\mathbf{u}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a $\mathrm{rot}_\Gamma\mathbf{rot}_\Gamma\psi = \Delta_\Gamma\psi\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Comme l'application $\Delta_\Gamma$ : $H^1(\Gamma)/\mathbb{R} \longrightarrow H^{-1}(\Gamma)$ est un isomorphisme, on peut en déduire que $\psi\in H^1(\Gamma)$. Ainsi, $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma\phi + \mathbf{rot}_\Gamma\psi$ appartient à $L^2(\Gamma)$ et nous avons donc établi le lemme suivant.

**Lemme 4.1.1** *Supposons que $\Gamma$ est la frontière simplement connexe d'un domaine lipschitzien. Alors,*

$$H^{-\frac{1}{2}}(rot_\Gamma,\Gamma)\cap H^{-\frac{1}{2}}(div_\Gamma,\Gamma)\subset L^2(\Gamma). \tag{4.2}$$

Nous reviendrons plus loin sur ce lemme qui peut-être optimisé en supposant que $\Gamma$ est plus régulière. En ce qui concerne les tenseurs $[\sigma]$, $[\nu]$, $[\tau]$ et $[\eta]$, on suppose qu'ils vérifient les propriétés suivantes. Soit $\Sigma$ une surface telle que :

$$\Omega = \omega_-\cup\Sigma\cup\omega_+,$$

où $\omega_-$ et $\omega_+$ sont disjoints. On suppose alors que chacun des tenseurs ci-dessus est à support dans $\omega_+$ et que la frontière externe de $\omega_+$ coïncide avec $\Gamma$ (voir figure 4.1). De plus, chacun des coefficients des tenseurs est supposé dans $L^\infty(\omega^+)$. Pour prouver que le problème (4.1)

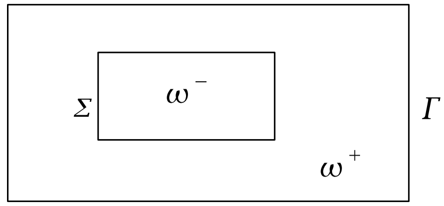



FIG. 4.1 – géométrie du domaine $\Omega$

admet une unique solution, nous allons utiliser la théorie de Hille-Yosida. Pour cela, nous introduisons l'opérateur $A$ défini par :

$$A = \begin{bmatrix} [\sigma] & -\mathrm{rot} & [\nu] & 0 \\ \mathrm{rot} & [\tau] & 0 & [\eta] \\ -[\nu] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\eta] & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui permet d'écrire le problème posé dans $\Omega \times ]0, \infty[$ sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0,$$

avec $U = {}^t[\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}]$. On suppose que les coefficients des tenseurs $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\nu]$ et $[\eta]$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et que les coefficients de $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont positifs.
Soit $\mathcal{D}(A)$ le sous-espace de $\mathbb{V}$ définissant le domaine de $A$. Alors,

$$\mathcal{D}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V},\ A\mathbf{v} \in \mathbb{V}, (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

D'après (4.2), on a :

$$\mathcal{D}(A) = \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{V};\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{H}(\mathrm{rot}, \Omega);\ (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma}, (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n})_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma)^3; \\ (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma\big\}.$$

Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Proposition 4.1.2** *L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ est maximal monotone.*

**Preuve.** Soit $v$ dans $\mathcal{D}(A)$. On a :

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathbb{V}} = \int_\Omega ([\sigma]\mathbf{v}_1 - \mathrm{rot}\mathbf{v}_2 + [\nu]\mathbf{v}_3).\mathbf{v}_1\, d\mathbf{x} + \int_\Omega ([\tau]\mathbf{v}_2 + \mathrm{rot}\mathbf{v}_1 + [\eta]\mathbf{v}_4).\mathbf{v}_2\, d\mathbf{x} \\ - \int_\Omega [\nu]\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_3\, d\mathbf{x} - \int_\Omega [\eta]\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_4\, d\mathbf{x}. \tag{4.3}$$

Comme $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ appartiennent à $\mathbb{H}(\mathrm{rot}, \Omega)$ avec des traces tangentielles dans $L^2(\Gamma)^3$, on peut transformer l'équation (4.3) grâce à la formule de Green en :

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathbb{V}} = \int_\Omega ([\sigma]\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + [\tau]\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)\, d\mathbf{x} + \int_\Gamma (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_1\, d\Gamma.$$

De plus, $\mathbf{n}\wedge\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{n}\wedge(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{n})$ sont liés sur $\Gamma$ par la condition de Silver-Müller ce qui entraîne :

$$\forall\mathbf{v}\in\mathcal{D}(A),\quad (A\mathbf{v},\mathbf{v})_{\mathbb{V}}=\int_\Omega([\sigma]\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1+[\tau]\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\,d\mathbf{x}+\int_\Gamma|\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{n}|^2\,d\Gamma.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\forall\mathbf{v}\in\mathcal{D}(A),\quad (A\mathbf{v},\mathbf{v})_{\mathbb{V}}\geq 0,$$

ce qui signifie que $A$ est monotone.
La seconde partie de la preuve est consacrée à l'étude d'un problème aux limites, dans le but de prouver que $A$ est maximal. Considérons $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{V}$ ; on cherche $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{D}(A)$ vérifiant :

$$(I_{\mathbb{V}}+A)\mathbf{v}=\mathbf{u}, \tag{4.4}$$

où $I_{\mathbb{V}}$ représente l'identité dans $\mathbb{V}$. En développant (4.4), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll}(I+[\sigma])\mathbf{v}_1-\mathrm{rot}\mathbf{v}_2+[\nu]\mathbf{v}_3=\mathbf{u}_1 & \text{dans }\Omega\\ \mathrm{rot}\mathbf{v}_1+(I+[\tau])\mathbf{v}_2+[\eta]\mathbf{v}_4=\mathbf{u}_2 & \text{dans }\Omega\\ \mathbf{v}_3-[\nu]\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_3 & \text{dans }\Omega\\ \mathbf{v}_4-[\eta]\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_4 & \text{dans }\Omega\\ (\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n}+\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{n}=0 & \text{sur }\Gamma.\end{array}\right. \tag{4.5}$$

Les deux dernières équations de (4.5) posées dans $\Omega$ permettent d'éliminer $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v}_4$. Le système (4.5) se transforme alors en un système couplé de deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ll}(I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1-\mathrm{rot}\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_1-[\nu]\mathbf{u}_3 & \text{dans }\Omega\\ (I+[\tau]+[\eta]^2)\mathbf{v}_2+\mathrm{rot}\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_2-[\eta]\mathbf{u}_4 & \text{dans }\Omega\\ (\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n}+\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{n}=0 & \text{sur }\Gamma.\end{array}\right. \tag{4.6}$$

Les matrices $I+[\sigma]+[\nu]^2$ et $I+[\tau]+[\eta]^2$ sont inversibles car $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont à coefficients positifs. Par ailleurs, si l'on pose :

$$\widetilde{\mathbf{u_1}}=\mathbf{u}_1-[\nu]\mathbf{u}_3,\qquad \widetilde{\mathbf{u_2}}=\mathbf{u}_2-[\eta]\mathbf{u}_4,$$

on montre facilement que $\widetilde{\mathbf{u_1}}$ et $\widetilde{\mathbf{u_2}}$ appartiennent à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ car $[\nu]$ et $[\eta]$ sont à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. Il s'agit donc de trouver un couple $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ dans $\mathbb{H}(\mathrm{rot},\Omega)\times\mathbb{H}(\mathrm{rot},\Omega)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ll}(I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1-\mathrm{rot}\mathbf{v}_2=\widetilde{\mathbf{u_1}} & \text{dans }\Omega\\ (I+[\tau]+[\eta]^2)\mathbf{v}_2+\mathrm{rot}\mathbf{v}_1=\widetilde{\mathbf{u_2}} & \text{dans }\Omega\\ (\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n}+\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{n}=0 & \text{sur }\Gamma\end{array}\right. \tag{4.7}$$

pour tout $(\widetilde{\mathbf{u_1}},\widetilde{\mathbf{u_2}})$ donné dans $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$.
En supposant que (4.7) admet une solution régulière, on peut écrire :

$$\forall\mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\qquad \int_\Omega(I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}-\int_\Omega\mathrm{rot}\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}=\int_\Omega\widetilde{\mathbf{u_1}}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}.$$

On utilise la formule de Green pour transformer la seconde intégrale et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\forall\mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\quad &\int_\Omega(I+[\sigma]+[\nu]^2)\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}-\int_\Omega\mathbf{v}_2\cdot\mathrm{rot}\mathbf{w}\,d\mathbf{x}\\ &\qquad-\int_\Gamma(\mathbf{w}\wedge\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}_2\,d\Gamma=\int_\Omega\widetilde{\mathbf{u_1}}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ensuite, on peut éliminer $\mathbf{v}_2$ dans $\Omega$ en utilisant la seconde équation de (4.7) :

$$\mathbf{v}_2 = (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\widetilde{\mathbf{u_2}} - (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{v}_1,$$

avec la condition :

$$\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \quad \text{sur } \Gamma.$$

L'équation (4.8) devient alors une équation variationnelle avec $\mathbf{v}_1$ pour seule inconnue :

$$\int_\Omega (I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}$$
$$+ \int_\Gamma (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})\, d\Gamma = \int_\Omega \widetilde{\mathbf{u_1}} \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\widetilde{\mathbf{u_2}} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}. \tag{4.9}$$

Nous poursuivons en vérifiant que l'on est dans le cadre d'application du théorème de Lax-Milgram. Soit $a$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{W} \times \mathbb{W}$ définie par :

$$a(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) = \int_\Omega (I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}$$
$$+ \int_\Gamma (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})\, d\Gamma;$$

où

$$\mathbb{W} = \{\mathbf{v}_1 \in \mathbb{H}(\mathrm{rot}, \Omega),\ \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}_{|_\Gamma} \in L^2(\Gamma)^3\}.$$

L'espace $\mathbb{W}$ est muni de la norme hilbertienne du graphe. On vérifie aisément que $a$ est continue et coercive sur $\mathbb{W} \times \mathbb{W}$. De plus, la forme linéaire :

$$\mathbf{w} \in \mathbb{W} \longmapsto \int_\Omega \widetilde{\mathbf{u_1}} \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\widetilde{\mathbf{u_2}} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}$$

est continue sur $\mathbb{W}$. Par conséquent, grâce au théorème de Lax-Milgram, on peut affirmer qu'il existe $\mathbf{v}_1$ dans $\mathbb{W}$ qui est l'unique solution du problème variationnel (4.9).
Ensuite, puisque $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \mathbb{W}$, on a :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \quad \int_\Omega (I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}$$
$$= \int_\Omega \widetilde{\mathbf{u_1}} \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}\widetilde{\mathbf{u_2}} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x}.$$

On définit alors $\mathbf{v}_2$ par la relation :

$$\mathbf{v}_2 = (I + [\tau] + [\eta]^2)^{-1}(\widetilde{\mathbf{u_2}} - \mathrm{rot}\mathbf{v}_1).$$

Le vecteur $\mathbf{v}_2$ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \quad \int_\Omega (I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{v}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \widetilde{\mathbf{u_1}} \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x}.$$

Après application de la formule de Green, cette relation devient :

$$(I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 - \mathrm{rot}\mathbf{v}_2 = \widetilde{\mathbf{u_1}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^3,$$

ce qui montre que rot$\mathbf{v_2}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)^3$. Cela implique que l'on peut définir la trace $\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma)$. En appliquant les mêmes arguments au vecteur $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^3$, on montre que :

$$\int_\Omega (I + [\sigma] + [\nu]^2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{v}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w}\, d\mathbf{x} + \int_\Gamma (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})\, d\Gamma = \int_\Omega \widetilde{\mathbf{u_1}} \cdot \mathbf{w}\, d\mathbf{x}$$

ce qui entraîne :

$$\forall \mathbf{w} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \quad \langle (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n})) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Ainsi, nous avons :

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma)^3,$$

et

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}, \Gamma).$$

Finalement, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est solution du problème aux limites (4.7) et en posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= [\nu]\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_3 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v}_4 &= [\eta]\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_4 \quad \text{in } \Omega; \end{aligned}$$

on reconstruit le champ $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \in \mathcal{D}(A)$ qui est solution de (4.5). En conclusion, l'opérateur $A$ est maximal sur $\mathbb{V}$. $\square$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Hille-Yosida. En effet, $A$ étant maximal monotone, il est générateur d'un semi-groupe continu de contraction noté $\{\mathcal{Z}(t)\}_{t>0}$ et on a donc le résultat suivant.

**Théorème 4.1.3** *Pour tout* $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0})$ *dans* $\mathcal{D}(A)$*, le système (4.1) admet une unique solution* $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$ *dans* $C^0([0,\infty[, \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty[, \mathbb{V})$.

Le résultat précédent traite le cas de données initiales régulières dans $\mathcal{D}(A)$. On peut définir une solution plus faible à partir de données initiales dans $\mathbb{V}$, comme cela est précisé par exemple dans [28]. C'est ce que l'on appelle une solution d'énergie finie qui est définie directement à partir du semi-groupe continu $\mathcal{Z}(t)$. Alors, pour $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0})$ dans $\mathbb{V}$,

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{Z}(t)\,(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0}), \\ \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{V}. \end{cases}$$

## 4.2 Comportement en temps long

### 4.2.1 Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement en temps long du champ électromagnétique. Pour cela, nous allons considérer différentes énergies et analyser comment ces énergies évoluent au cours du temps. On commence par introduire la fonctionnelle $\mathcal{E}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q}) \in \mathbb{V}, \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + |\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2)\, d\mathbf{x}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}||(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q})||^2_{\mathbb{V}}.$$

La fonction $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ définit une énergie pour toute solution de (4.1) et on a le résultat suivant.

**Proposition 4.2.1** *Pour toute donnée initiale* $(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0})$ *dans* $\mathcal{D}(A)$*,* $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ *est dérivable et si* $[\sigma]$ *et* $[\tau]$ *sont positifs, elle est décroissante.*

**Preuve.** D'après le théorème 4.1.3, la solution de (4.1) appartient à $C^1([0,\infty[,\mathbb{V})$ si les données initiales sont dans $\mathcal{D}(A)$. Par conséquent, comme $\mathcal{E}^{1/2}$ est (au facteur $1/\sqrt{2}$ près), la norme de $\mathbb{V}$, $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ est dérivable et nous avons :

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{E}'(t) = \int_\Omega (\partial_t\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} + \partial_t\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + \partial_t\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q})\, d\mathbf{x}.$$

Ainsi, en utilisant les équations gouvernant (4.1), on obtient :

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{E}'(t) = -\int_\Omega ([\sigma]\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\, d\mathbf{x} - \int_\Gamma |\mathbf{E}\wedge\mathbf{n}|^2\, d\Gamma, \tag{4.10}$$

qui est négatif si $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont positifs. Ceci achève la preuve. □
Pour des données initiales plus régulières, on peut introduire d'autres fonctionnelles d'énergie. Plus précisément, si les données initiales sont dans $\mathcal{D}(A^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, on peut définir les fonctionnelles :

$$\forall(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q}) \in \mathcal{D}(A^k), \quad \mathcal{E}_k(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t^k\mathbf{E}|^2 + |\partial_t^k\mathbf{H}|^2 + |\partial_t^k\mathbf{P}|^2 + |\partial_t^k\mathbf{Q}|^2)\, d\mathbf{x}$$
$$= \frac{1}{2}||(\partial_t^k\mathbf{E},\partial_t^k\mathbf{H},\partial_t^k\mathbf{P},\partial_t^k\mathbf{Q})||^2_{\mathbb{V}}.$$

En faisant exactement les mêmes calculs que ceux menés dans la preuve de la proposition 4.2.1, on démontre que ces applications sont aussi décroissantes. Plus précisément, si $(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0}) \in D(A^{k+1})$, avec $k \geq 1$, l'application $t \to \mathcal{E}_k(t)$ est dérivable et on a :

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{E}_k'(t) = -\int_\Omega (\partial_t^k[\sigma]\mathbf{E}\cdot\partial_t^k\mathbf{E} + [\tau]\partial_t^k\mathbf{H}\cdot\partial_t^k\mathbf{H})\, d\mathbf{x} - \int_\Gamma |\partial_t^k\mathbf{E}\wedge\mathbf{n}|^2\, d\Gamma. \tag{4.11}$$

Nous poursuivons en cherchant à déterminer le comportement en temps long de ces fonctionnelles. Pour le moment, nous pouvons seulement affirmer que ces fonctionnelles admettent toutes une limite lorsque $t$ tend vers $+\infty$. En effet, chacune d'elles est positive et décroissante (sous réserve de choisir de données assez régulières). Dans cette partie, nous cherchons à déterminer ces limites. Pour les équations de Maxwell posées dans le vide, ce résultat est connu [11]. Dans ce cas, le comportement en temps long de l'énergie dépend des données initiales et de la géométrie du domaine considéré. En particulier, si les données sont à support compact et si $\Omega$ est simplement connexe, le champ électromagnétique tend vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Afin d'étudier les différentes fonctionnelles d'énergie, nous rassemblons, dans le paragraphe suivant, des résultats qui nous sont utiles dans la suite.

### 4.2.2 Résulats préliminaires

Nous avons rassemblé ci-dessous quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle que nous utilisons pour étudier le comportement en temps long de l'énergie. Nous énonçons des lemmes suivis de leur démonstration ou de la référence dans laquelle on peut trouver une démonstration du résultat annoncé.

**Lemme 4.2.2** *Soit $\Omega$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ composé de deux sous-domaines $\omega_-$ et $\omega_+$ tels que $\Omega = \omega_- \cup \Sigma \cup \omega_+$ où $\omega_-$ désigne le domaine intérieur de frontière $\Sigma$ et $\omega_+$ représente le domaine extérieur de frontière $\Sigma \cup \Gamma$, avec $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$. On a donc $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ à support dans $\omega_+$. Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème aux limites :*

$$\Delta\varphi = f \quad \textit{dans} \quad \Omega.$$

*Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\omega_-)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\omega_+)}.$$

**Preuve**. La fonction $\varphi$ est solution d'un problème aux limites qui s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_-, \qquad \Delta\varphi = f \quad \text{dans} \quad \omega_+,\\
&[\varphi] = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \partial\omega_- \cap \partial\omega_+,\\
&\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,
\end{aligned}$$

où $[\varphi]$ désigne le saut de $\varphi$ à l'interface $\Sigma$. Plus précisément, si l'on note $\varphi_-$ la trace intérieure (sur $\partial\omega_-$) de $\varphi$ et $\varphi_+$ sa trace extérieure, on a $[\varphi] = \varphi_- - \varphi_+$ en supposant que la normale à $\Sigma$ est orientée de $\omega_-$ vers $\omega_+$. Comme $\varphi$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, $\varphi_-$ et $\varphi_+$ sont dans $H^{1/2}(\Sigma)$. Soit $\mathcal{R}$ l'opérateur de relèvement défini par :

$$\mathcal{R} : \ \varphi \in H^{1/2}(\Sigma) \mapsto q = \mathcal{R}(\varphi) \in H^1(\omega_-),$$

où $q$ est tel que $q_{|\Sigma} = \varphi$. L'opérateur $\mathcal{R}$ est continu [28]. Posons maintenant $\phi := q - p|_{\omega_-}$. Par construction, $\phi$ appartient à $H_0^1(\omega_-)$ et on a aussi :

$$\Delta\phi = \Delta q \quad \text{dans} \quad \omega_-,$$

avec $\Delta q \in H^{-1}(\omega_-)$. À l'aide de la formule de Green avec $\phi$ pour fonction-test, on en déduit que :

$$\|\nabla\phi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)} \leq \|\Delta q\|_{H^{-1}(\omega_-)}. \tag{4.12}$$

De plus, on a :

$$\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)} \leq \|\nabla q\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)} + \|\nabla\phi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)}. \tag{4.13}$$

Le premier terme de l'inégalité (4.13) est majoré par $C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}$ comme conséquence de la continuité de l'opérateur de relèvement. Pour majorer le second terme de (4.13), on utilise tout d'abord (4.12), ce qui conduit à estimer $||\Delta q|||_{H^{-1}(\omega_-)}$. Par définition, nous avons :

$$\|\Delta q\|_{H^{-1}(\omega_-)} = \inf_{\substack{\psi \in H_0^1(\omega_-)\\ \psi \neq 0}} \frac{| < \Delta q, \psi > |}{\|\nabla\psi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)}},$$

on en déduit donc que :

$$\|\Delta q\|_{H^{-1}(\omega_-)} \leq \|\nabla q\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)} \leq C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}$$

Par conséquent, il existe une constante $C^*$ positive telle que :

$$\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_-)} \leq C^*\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}.$$

Par continuité de l'application trace dans $H^1(\omega_+)$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq C\|\varphi\|_{H^1(\omega_+)},$$

et comme $\varphi_{|\Sigma} = 0$, $\varphi$ vérifie l'inégalité de Poincaré dans $\omega_+$ :

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}.$$

En effet, si cela n'était pas le cas, il existerait une suite $(\varphi_k)_k$ bornée dans $H^1(\omega_+)$ telle que :

$$\varphi_k = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \qquad \text{et} \qquad |\varphi_k|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} > k|\nabla\varphi_k|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}.$$

Quitte à diviser par $\|\varphi_k\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}$ (qui est non nul par hypothèse), on peut supposer que $\|\varphi_k\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = 1$. En faisant tendre $k$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla\varphi_k\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = 0.$$

Comme $(\varphi_k)_k$ converge faiblement vers $\varphi$ dans $H^1(\omega_+)$ (quitte à extraire une sous-suite), l'injection compacte de $H^1(\omega_+)$ dans $L^2(\omega_+)$ implique :

$$\varphi_k \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \varphi \quad \text{dans} \quad L^2(\omega_+) \quad \text{fort.}$$

On en déduit que nécessairement $\nabla\varphi = 0$ dans $\Omega$. L'état limite $\varphi$ est donc constant dans $\omega_+$ (supposé connexe) ce qui contredit le fait que $p_k = 0$ sur $\Gamma$ car $(\varphi_k)_k$ converge fortement vers $\varphi = \mathit{constante}$ dans $H^1(\omega_+)$, ce qui assure la convergence de la trace de $\varphi_k$ vers la trace de $\varphi$ par continuité de l'application trace de $H^1(\omega_+)$. On a donc $\varphi_{|\Gamma} = 0$, ce qui impose $\varphi = \text{constante} = 0$ dans $\omega+$ et contredit donc le fait que $\|\varphi_k\|^2(\omega_+) = 1$.
En conclusion,

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\omega_-)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\omega_+)},$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.2.2. □

**Lemme 4.2.3** *Soit $\Omega$ un ouvert régulier de frontière $\Gamma$. On a le résultat de régularité suivant :*

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \mathit{div}\,\mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathit{rot}\,\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), u \wedge n|_\Gamma \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)\} = \mathbb{H}^1(\Omega).$$

Ce résultat est classique, on trouve une démonstration dans [47]. Nous insistons toutefois sur le fait que l'ouvert $\Omega$ doit être régulier. Par exemple, supposer $\Omega$ lipschitzien ne suffit pas.

**Lemme 4.2.4** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma$ lipschitzienne. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $\Omega$ telle que :*

$$\forall \mathbf{u} \in H(div, \Omega), \qquad \|\mathbf{u}.\mathbf{n}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\|\mathbf{u}\|_{H(div,\Omega)},$$

*où :*

$$\|\mathbf{u}\|_{H(div,\Omega)} = (\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|div\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Ce résultat est une conséquence immédiate de la continuité de l'application trace sur $H(div, \Omega)$. Nous renvoyons par exemple à [47].

### 4.2.3 Analyse en temps long

Nous avons vu que les énergies $\mathcal{E}_k$ sont des fonctions décroissantes du temps. Ces énergies sont toutes définies comme la norme de la dérivée en temps d'ordre $k$ du champ $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Par conséquent, étudier les énergies revient à analyser le comportement en temps long de la solution. Nous commençons par établir des résultats de décroissance localisés dans la couche absorbante $\omega_+$.

**Proposition 4.2.5** *Soit* $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{P_0}, \mathbf{Q_0}) \in D(A^2)$. *Alors :*

$$\lim_{t\to\infty} ||[\sigma]\mathbf{E}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = \lim_{t\to\infty} ||[\tau]\mathbf{H}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{E} \wedge \boldsymbol{n}||_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} = \lim_{t\to\infty} ||\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{n}||_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} = 0.$$

**Preuve**. Pour des données initiales dans $D(A)$, nous avons vu que l'énergie $\mathcal{E}$ est dérivable avec :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{E}'(t) = -([\sigma]\mathbf{E}, \mathbf{E}) - ([\tau]\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \|\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)},$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On a donc :

$$([\sigma]E, E) \leq -\mathcal{E}'(t). \tag{4.14}$$

Or, comme $[\sigma]$ est borné, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C([\sigma]\mathbf{E}, \mathbf{E}).$$

L'inégalité (4.14) entraîne alors :

$$\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}'(t). \tag{4.15}$$

Ayant supposé que les données initiales sont dans $D(A^2)$, l'énergie d'ordre 1 est aussi dérivable et on a :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{E}_1'(t) = -([\sigma]\partial_t\mathbf{E}, \partial_t\mathbf{E}) - ([\tau]\partial_t\mathbf{H}, \partial_t\mathbf{H}) - \|\partial_t\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}.$$

En appliquant le raisonnement ci-dessus à $\mathcal{E}_1$, on obtient de la même façon :

$$\|[\sigma]\partial_t\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t). \tag{4.16}$$

Fixons alors $T > 0$. On a, pour tout $t > T$,

$$(t-T)\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = \int_T^t \frac{d}{ds}\left((s-T)\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\right) ds.$$

En développant, il vient :

$$(t-T)\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = \int_T^t \|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} ds + 2\int_T^t (s-T)([\sigma]\mathbf{E}, [\sigma]\partial_t\mathbf{E}) ds.$$

Grâce à (4.15), on a donc :

$$(t-T)\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C(\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(t)) + 2(t-T)\int_T^t ([\sigma]\mathbf{E}, [\sigma]\partial_t\mathbf{E}) ds.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations (4.15) et (4.16) entraînent :

$$\begin{aligned}2([\sigma]E,[\sigma]\partial_t E) &\leq 2\|[\sigma]\mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\|[\sigma]\partial_t\mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq \|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|[\sigma]\partial\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\\ &\leq -C\left(\mathcal{E}'(t)+\mathcal{E}_1'(t)\right),\end{aligned}$$

d'où :

$$(t-T)\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C\left\{(1+t-T)(\mathcal{E}(T)-\mathcal{E}(t))+(t-T)(\mathcal{E}_1(T)-\mathcal{E}_1(t))\right\}.$$

Par conséquent, pour tout $t > T+1$ :

$$\|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C\{2(\mathcal{E}(T)-\mathcal{E}(t))+(\mathcal{E}_1(T)-\mathcal{E}_1(t))\}. \tag{4.17}$$

Nous avons vu plus haut que les fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ admettent une limite lorsque $t$ tend vers l'infini (elles sont décroissantes et positives). Par conséquent :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists T^*>0,\ \forall s,t>T^*,\quad |\mathcal{E}(s)-\mathcal{E}(t)|\leq\frac{\varepsilon}{4C}\quad \text{et}\quad |\mathcal{E}_1(s)-\mathcal{E}_1(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2C},$$

où $C$ est la constante apparaissant dans l'inégalité (4.17). Posons alors $T = 1+T^*$ ; on a $T > T^*$ et, si $t > T+1$ alors $t > T^*$, donc :

$$\forall t > T+1,\qquad \|[\sigma]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\|[\sigma]\mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}$ tend vers 0. On démontre les autres résultats exactement de la même façon, ce qui justifie que nous ne développons pas les preuves. □

Si l'on suppose que $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont à coefficients strictement positifs dans $\omega_+$, la proposition 4.2.5 montre que :

$$(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0})\in D(A^2)\Longrightarrow \lim_{t\to\infty}||\mathbf{E}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=\lim_{t\to\infty}||\mathbf{H}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=0.$$

Évidemment, on peut généraliser le résultat de la proposition 4.2.5 en prenant des données dans $D(A^{k+1})$, $k\geq 1$. En effet, en appliquant la même preuve à $\partial_t^{k-1}\mathbf{E}$ et $\partial_t^{k-1}\mathbf{H}$, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 4.2.6** *Soit $k\geq 1$ et $(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0})\in D(A^{k+1})$. Alors :*

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}||[\sigma]\partial_t^{k-1}\mathbf{E}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=\lim_{t\to\infty}||[\tau]\partial_t^{k-1}\mathbf{H}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=0,\\ &\lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k-1}\mathbf{E}\wedge\boldsymbol{n}||_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}=\lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k-1}\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{n}||_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}=0.\end{aligned}$$

Comme précédemment, lorsque $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont à coefficients strictement positifs dans $\omega_+$, cette proposition entraîne :

$$(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0})\in D(A^{k+1})\Longrightarrow \lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k-1}\mathbf{E}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=\lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k-1}\mathbf{H}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=0.$$

Par ailleurs, la proposition 4.2.6 admet le corollaire suivant.

**Corollaire 4.2.7** *Soit $k\geq 1$ et $(\mathbf{E_0},\mathbf{H_0},\mathbf{P_0},\mathbf{Q_0})\in D(A^{k+1})$. On suppose que le support de $[\nu]$ (respectivement de $[\eta]$) est inclus dans le support de $[\sigma]$ (respectivement de $[\tau]$). Alors :*

$$\lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k}\mathbf{P}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=\lim_{t\to\infty}||\partial_t^{k}\mathbf{Q}||_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}=0.$$

Nous allons maintenant étudier le comportement en temps long des champs dans $\Omega$ tout entier. Comme les inconnues auxiliaires $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ ont été introduites afin de modéliser le matériau absorbant, il semble naturel de considérer le cas où elles sont nulles dans $\omega_-$. C'est pour cette raison que nous supposons désormais que $\mathbf{P_0} = \mathbf{Q_0} = 0$. Comme :

$$\partial_t \mathbf{P} = \partial_t \mathbf{Q} = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- \times ]0, \infty[,$$

on a bien :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- \times ]0, \infty[.$$

Afin d'étudier le comportement du champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ dans $\omega_-$, nous décomposons chacun des champs de la façon suivante. Soient $p$ et $q$ dans $H^1_0(\Omega)$ solutions de :

$$\Delta p = \operatorname{div} E \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad \text{et} \qquad \Delta q = \operatorname{div} H \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Les fonctions $p$ et $q$ existent et sont uniques. Nous introduisons alors les vecteurs $\mathbf{E}^*$ et $\mathbf{H}^*$ définis par :

$$\mathbf{E}^* := \mathbf{E} - \nabla p, \qquad \mathbf{H}^* := \mathbf{H} - \nabla q.$$

Ces deux vecteurs sont à divergence nulle. De plus, comme $p$ et $q$ sont nulles sur $\Gamma$, $\nabla_\Gamma p$ et $\nabla_\Gamma q$ sont aussi nuls sur $\Gamma$, ce qui entraîne que $\mathbf{E}^*$ et $\mathbf{H}^*$ vérifient la condition de Silver-Müller sur $\Gamma$. Enfin, on montre facilement que $\mathbf{E}^*$ et $\nabla p$ d'une part, $\mathbf{H}^*$ et $\nabla q$ d'autre part, sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. L'intérêt de cette décomposition est qu'elle permet d'utiliser un résultat connu pour un système de Maxwell de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{F} - \operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[, \\ \partial_t \mathbf{G} + \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{F_0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{G}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{G_0}(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G} = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[, \\ (\mathbf{F} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{G} \wedge \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \times ]0, \infty[; \end{array} \right. \tag{4.18}$$

où $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont donnés dans $C^0\left([0, \infty[, \mathbb{L}^2(\Omega)\right)$, à divergence nulle avec :

$$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{f}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \lim_{t \to \infty} ||\mathbf{g}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Les données initiales sont supposées à support compact dans $\omega_-$ à divergence nulle. Pour une frontière $\Gamma$ suffisamment régulière (de classe $C^1$), on a alors le résultat suivant (voir [111, 12]).

**Théorème 4.2.8** *Soit* $(\mathbf{F_0}, \mathbf{G_0}) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$. *Le couple* $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *solution de (4.18) vérifie :*

$$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{F}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \lim_{t \to \infty} ||\mathbf{G}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

La preuve de ce théorème repose sur les propriétés du semi-groupe associé. La régularité de la frontière $\Gamma$ est nécessaire car on peut améliorer (au sens de la régularité) le résultat du lemme 4.1.1. En effet, on a dans ce cas [11] :

$$H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) \cap H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

et comme les champs de (4.18) sont à divergence nulle, le domaine de l'opérateur est alors inclus dans $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$. À l'aide de cette propriété, on utilise un argument de compacité qui conduit au théorème 4.2.8.
Nous allons appliquer ce résultat à notre problème. Pour cela, nous décomposons $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ comme ci-dessus et nous écrivons le système vérifié par le couple à divergence nulle $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$. Ce système est de la forme (4.18) avec :

$$\mathbf{f} = -[\sigma]\mathbf{E} - [\nu]\mathbf{P} - \nabla \partial_t p,$$
$$\mathbf{g} = -[\tau]\mathbf{H} - [\eta]\mathbf{Q} - \nabla \partial_t q.$$

Les vecteurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ ont la régularité souhaitée et sont à divergence nulle (par construction du couple $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$). Il s'agit de montrer que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ tendent vers 0 (lorsque $t \to \infty$) en norme $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Ce résultat n'est pas simple à établir, la difficulté vient des termes $[\nu]\mathbf{P}$ et $[\eta]\mathbf{Q}$, dont le comportement en temps long n'est pas connu. Cela nous incite à étudier l'énergie $\mathcal{E}_1$ en appliquant le raisonnement précédent au couple $(\partial_t \mathbf{E}^*, \partial_t \mathbf{H}^*)$. Ainsi, nous nous intéressons à :

$$\partial_t \mathbf{f} = -[\sigma]\partial_t \mathbf{E} - [\nu]\partial_t \mathbf{P} - \nabla \partial_t^2 p,$$
$$\partial_t \mathbf{g} = -[\tau]\partial_t \mathbf{H} - [\eta]\partial_t \mathbf{Q} - \nabla \partial_t^2 q.$$

Pour des données dans $D(A^2)$, $\partial_t \mathbf{f}$ et $\partial_t \mathbf{g}$ vérifient les bonnes hypothèses de régularité. Par ailleurs, pour $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in D(A^3)$, la proposition 4.2.6 et le corollaire 4.2.7 montrent que :

$$\lim_{t\to\infty} ||\partial_t \mathbf{f}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{t\to\infty} ||\nabla \partial_t^2 p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} ||\partial_t \mathbf{g}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{t\to\infty} ||\nabla \partial_t^2 q||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Nous établissons alors la proposition suivante.

**Proposition 4.2.9** *On a :* $\lim_{t\to\infty} ||\nabla \partial_t^2 p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \lim_{t\to\infty} ||\nabla \partial_t^2 q||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$

**Preuve**. On a :

$$\left(\partial_t^2 \mathbf{E} - \operatorname{rot} \partial_t \mathbf{H} + [\sigma]\partial_t \mathbf{E} + [\nu]\partial_t \mathbf{P}, \nabla \partial_t^2 p\right) = 0,$$

donc :

$$||\nabla \partial_t^2 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\left([\sigma]\partial_t \mathbf{E} + [\nu]\partial_t \mathbf{P}, \nabla \partial_t^2 p\right),$$

ce qui donne :

$$||\nabla \partial_t^2 p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \|[\sigma]\partial_t \mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\nu]\partial_t \mathbf{P}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

De la même façon, on obtient :

$$||\nabla \partial_t^2 q||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \|[\tau]\partial_t \mathbf{H}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\eta]\partial_t \mathbf{Q}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

et on a le résultat attendu en appliquant la proposition 4.2.6 et le corollaire 4.2.7. □
En conclusion, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.2.10** *Soient* $k \ge 1$ *et* $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ *dans* $D(A^{k+2})$. *On a alors* $\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}_k(t) = 0$, *c'est-à-dire :*

$$\lim_{t\to\infty} ||(\partial_t^k \boldsymbol{E}, \partial_t^k \boldsymbol{H}, \partial_t^k \boldsymbol{P}, \partial_t^k \boldsymbol{Q})||_{\mathbb{V}} = 0.$$

**Preuve**. Nous venons de détailler la preuve pour $k = 1$, et elle est identique pour $k \ge 2$. □

## 4.3 Stabilité exponentielle

Dans la partie 4.2, nous avons montré que le modèle absorbant est associé à une famille de fonctionnelles d'énergie qui tendent vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Une question demeure au sujet de l'énergie d'ordre 0. Nous ne pouvons pas préciser son comportement car nous ne savons pas contrôler les inconnues auxiliaires $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$. Dans cette partie, nous étudions une énergie auxiliaire associée à (4.1) pour laquelle on peut, sous des hypothèses convenables, exprimer le taux de décroissance. Dans la suite, on suppose que le domaine d'étude $\Omega$ est connexe et que sa frontière est simplement connexe. Nous commençons par établir un lemme préliminaire.

### 4.3.1 Résultat préliminaire

**Lemme 4.3.1** *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout champ de vecteurs $\mathbf{u}$ vérifiant :*

$$\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \;\; \mathit{div}\,\mathbf{u} = 0 \;\; \mathit{dans} \;\; \Omega, \;\; \mathit{rot}\,\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \;\; \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma) \;\; \mathit{sur} \;\; \Gamma,$$

*on ait :*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\mathit{rot}\,\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \right). \tag{4.19}$$

**Preuve**. Nous avons vu que si la frontière $\Gamma$ est régulière, tout champ de vecteurs vérifiant les hypothèses du lemme est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Supposons que l'inégalité (4.19) n'est pas vraie. Il existe alors une suite $(\mathbf{u}_k)_k$ bornée dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que :

$$\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} > C \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Quitte à diviser par $\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, on peut supposer que $\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 1$ et en faisant tendre $k$ vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}\| = 0.$$

Par ailleurs, d'après l'injection compacte de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, la suite $\mathbf{u}_k$ converge vers $\mathbf{u}$ fortement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On en déduit que le vecteur $\mathbf{u}$ vérifie :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \; \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma.$$

Par conséquent, $\mathbf{u}$ est dans le second espace de cohomologie défini par :

$$\mathcal{H}^2(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \; \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \; \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \;\text{ et }\; \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\},$$

qui est réduit à $\{\mathbf{0}\}$ puisque $\Omega$ est connexe de frontière $\Gamma$ simplement connexe [47]. On en déduit donc que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ce qui contredit le fait que la norme de $\mathbf{u}$ est égale à 1 dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. □

### 4.3.2 Présentation du modèle étudié

Afin d'établir le résultat de stabilité exponentielle, nous étudions le système (4.1) sous des hypothèses convenables. Le domaine intérieur $\omega_-$ est le vide et le domaine $\omega_+$ est constitué d'un matériau diélectrique modélisé par les inconnues auxiliaires $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$. Dans tout ce qui suit, les données initiales sont supposées à support compact dans $\omega_-$, avec, ici encore, $\mathbf{P_0} = \mathbf{Q_0} = \mathbf{0}$. On suppose qu'à $t = 0$, le champ électromagnétique est au repos et qu'il commence à se propager à l'intérieur de $\omega_-$ sous l'impulsion des données $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$. C'est pour cette raison que nous supposons $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ à support dans $\omega_-$ strictement. Si on suppose que $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ sont à divergence nulle, on assure que le champ électromagnétique se propageant dans $\omega_-$ est à divergence nulle à tout instant. Enfin, comme $\mathbf{P_0} = \mathbf{Q_0} = \mathbf{0}$, les inconnues auxiliaires $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont à support dans $\omega_+$. Elles ne perturbent donc jamais le champ solution des équations de Maxwell dans $\omega_-$. Dans la suite, nous associons au système (4.1) les énergies d'ordre 0, 1 et 2. Rappelons qu'elles sont définies par :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + |\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2\right) d\,\mathbf{x},\\
\mathcal{E}_1(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t\mathbf{E}|^2 + |\partial_t\mathbf{H}|^2 + |\partial_t\mathbf{P}|^2 + |\partial_t\mathbf{Q}|^2\right) d\,\mathbf{x},\\
\mathcal{E}_2(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t^2\mathbf{E}|^2 + |\partial_t^2\mathbf{H}|^2 + |\partial_t^2\mathbf{P}|^2 + |\partial_t^2\mathbf{Q}|^2\right) d\,\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

L'énergie $\mathcal{E}$ est dérivable pour des données dans $D(A)$ et la dérivabilité de $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$) est assurée si l'on prend des données dans $D(A^2)$ (respectivement $D(A^3)$). Nous supposons que $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont définis positifs sur $\mathbb{L}^2(\omega_+)$, c'est-à-dire, puisque ces tenseurs sont nuls sur $\omega_-$ :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\omega_+), \quad ([\sigma]\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha ||\mathbf{u}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \quad \text{et} \quad ([\tau]\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha ||\mathbf{u}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}. \tag{4.20}$$

En résumé, nous faisons désormais les hypothèses $(\mathcal{H})$ suivantes :

$(i)$ Les données $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ sont telles que :

$$(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in D(A^3),$$
$$\text{Supp}(\mathbf{E_0}) \subset \omega_-, \quad \text{Supp}(\mathbf{H_0}) \subset \omega_-, \quad \text{div}\,\mathbf{E_0} = \text{div}\,\mathbf{H_0} = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_-,$$

$(ii)$ les tenseurs $[\sigma]$ et $[\tau]$, à support dans $\omega_+$, sont définis positifs sur $\mathbb{L}^2(\omega_+)$.

### 4.3.3 Étude de l'énergie

Nous introduisons maintenant l'énergie auxilaire $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{F}(t) = \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t).$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $\rho \in ]0,1[$ et un instant $T > 0$ tels que :

$$\mathcal{F}(T) \leq \rho \mathcal{F}(0).$$

Cette estimation permet d'en déduire que l'énergie $\mathcal{F}$ est exponentiellement décroissante, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

$$\forall t > 0, \qquad \mathcal{F}(t) \leq C e^{-\beta t} \mathcal{F}(0). \tag{4.21}$$

Nous justifions cette affirmation en démontrant le résultat suivant.

**Lemme 4.3.2** *L'estimation (4.21) est vérifiée s'il existe $T > 0$ et $\rho \in ]0,1[$ pouvant dépendre de $T$ tels que :*

$$\mathcal{F}(T) \leq \rho \mathcal{F}(0). \tag{4.22}$$

**Preuve.** Le lemme 4.3.2 est une conséquence d'un théorème établi par G. Pazy [110]. Selon sa définition,

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2}||\mathcal{Z}(t)(\mathbf{E_1}, \mathbf{H_1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{2}||\mathcal{Z}(t)(\mathbf{E_2}, \mathbf{H_2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2,$$

où $\mathcal{Z}(t)$ est le semi-groupe de contraction continu associé au problème (4.1) et :

$$\mathbf{E_1} = \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{H_1} = \partial_t \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{E_2} = \partial_t^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{H_2} = \partial_t^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0);$$

c'est-à-dire, puisque $[\sigma]\mathbf{E_0} = \mathbf{0}$ ($\mathrm{Supp}(\mathbf{E_0}) \cap \mathrm{Supp}([\sigma]) = \emptyset$) et $\mathbf{P_0} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{E_1} = \mathrm{rot}\, \mathbf{H_0}, \quad \mathbf{H_1} = -\mathrm{rot}\, \mathbf{E_0}, \quad \mathbf{E_2} = \mathrm{rot}\, \mathbf{H_1}, \quad \mathbf{H_2} = -\mathrm{rot}\, \mathbf{E_1}.$$

G. Pazy a montré que $\mathcal{F}(t)$ vérifie (4.21) si et seulement si il existe un réel $p \in [1, +\infty[$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} (\mathcal{F}(t))^p \quad dt < +\infty. \tag{4.23}$$

Supposons maintenant que l'estimation (4.22) est vérifiée. La propriété (4.23) pour $p = 1$ est alors une simple conséquence du critère de comparaison séries-intégrales et de la théorie des semi-groupes. En effet, une série géométrique de raison $\rho \in ]0,1[$ converge et par ailleurs, d'après les propriétés des semi-groupes, nous avons pour tout entier $k$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(kT) &= \frac{1}{2}||\mathcal{Z}(kT)(\mathbf{E_1}, \mathbf{H_1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{2}||\mathcal{Z}(kT)(\mathbf{E_2}, \mathbf{H_2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2 \\ &= \frac{1}{2}||\mathcal{Z}((k-1)T)\mathcal{Z}(T)(\mathbf{E_1}, \mathbf{H_1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{2}||\mathcal{Z}((k-1)T)\mathcal{Z}(T)(\mathbf{E_2}, \mathbf{H_2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})||_{\mathbb{V}}^2,\end{aligned}$$

d'où :

$$0 \leq \mathcal{F}(kT) \leq \rho^k \mathcal{F}(0).$$

Par conséquent, la série de terme général $\mathcal{F}(kT)$ converge et cela entraîne la convergence de la série de terme général :

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \mathcal{F}(t)dt$$

puisque l'on a, grâce à la décroissance de $\mathcal{F}$ :

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \mathcal{F}(t)dt \leq T\mathcal{F}(kT).$$

La démonstration du lemme 4.3.2 résulte alors directement de la formule :

$$\int_0^{kT} \mathcal{F}(t)dt = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{lT}^{(l+1)T} \mathcal{F}(t)dt. \quad \square$$

Nous allons montrer que l'estimation (4.22) est vérifiée. Nous commençons par établir une inégalité que nous utilisons dans la suite.

**Lemme 4.3.3** *Il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{E}_1(0)$.*

**Preuve.** Comme $\mathbf{P_0} = \mathbf{0}$, nous avons :

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\mathbf{E_0}|^2 + |\mathbf{H_0}|^2\right) d\,\mathbf{x},$$

et nous avons vu dans la preuve du lemme 4.3.2 que :

$$\mathcal{E}_1(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\mathbf{E_1}|^2 + |\mathbf{H_1}|^2\right) d\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\mathrm{rot}\,\mathbf{E_0}|^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{H_0}|^2\right) d\,\mathbf{x}.$$

Par ailleurs, comme $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ sont à divergence nulle, on peut appliquer le lemme 4.3.1. Puisque :

$$\mathbf{E_0} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ sur } \ \Gamma \quad \text{et} \quad \mathbf{H_0} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ sur } \ \Gamma,$$

le lemme 4.3.1 donne donc :

$$\|\mathbf{E_0}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\mathrm{rot}\,\mathbf{E_0}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H_0}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\mathrm{rot}\,\mathbf{H_0}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ce qui démontre le résultat d'après les définitions de $\mathcal{E}(0)$ et $\mathcal{E}_1(0)$ ci-dessus. $\square$

Pour établir l'estimation (4.22), il suffit de montrer que :

$$\exists T > 0,\ \exists C_1 > 0,\ \exists C_2 \in ]0, T[,\ \int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \leq -C_1\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + C_2\mathcal{F}(0). \tag{4.24}$$

En effet, si (4.24) est vérifiée, la décroissance de $\mathcal{F}$ entraîne :

$$(C_1 + T)\mathcal{F}(T) \leq \Big(C_1 + C_2\Big)\mathcal{F}(0),$$

d'où l'inégalité (4.22) puisque $C_2 < T$. Ainsi, nous sommes ramenés à prouver l'estimation (4.24), ce qui permettra d'en déduire (4.22) et donc (4.21) d'après le lemme 4.3.2. Pour cela, nous procédons en trois étapes.

**Première étape : contrôle de $\int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt$ en fonction de $\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt$ et $\mathcal{F}(0)$.**

**Lemme 4.3.4** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}'(t), \quad \|\partial_t\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t), \quad \|\partial_t^2\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_2'(t); \tag{4.25}$$

$$\|\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}'(t), \quad \|\partial_t\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t), \quad \|\partial_t^2\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_2'(t). \tag{4.26}$$

**Preuve.** Comme $[\sigma]$ est défini positif sur $\mathbb{L}^2(\omega_+)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\partial_t^k\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C([\sigma]\partial_t^k\mathbf{E}, \partial_t^k\mathbf{E}) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2.$$

De plus, nous avons aussi :

$$([\sigma]\partial_t^k\mathbf{E}, \partial_t^k\mathbf{E}) \leq -\mathcal{E}_k'(t) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{en notant } \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}),$$

ce qui prouve les estimations (4.25). Le même raisonnement appliqué à $[\tau]$ et $\mathbf{H}$ démontre les inégalités (4.26). $\square$

Afin d'estimer le champ électromagnétique, nous allons maintenant utiliser les décompositions que nous avons introduites dans la partie 4.2. On écrit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + \nabla p \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^* + \nabla q$$

où $p$ et $q$ sont solution de :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \operatorname{div} \mathbf{E} \ \text{ dans } \ \Omega, \qquad p = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma, \\ \Delta q &= \operatorname{div} \mathbf{H} \ \text{ dans } \ \Omega, \qquad q = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma. \end{aligned}$$

Nous établissons alors le résultat suivant.

**Lemme 4.3.5** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$||\partial_t \mathbf{E}^*(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) \right). \tag{4.27}$$

**Preuve.** Comme $\partial_t \mathbf{E}^*$ est divergence nulle et à trace tangentielle dans $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$, on peut lui appliquer le lemme 4.3.1 ; on a donc :

$$\|\partial_t \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{E}^* \wedge \mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \right),$$

d'où :

$$\|\partial_t \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \right) \tag{4.28}$$

puisque $\partial_t \mathbf{E}^* \wedge \mathbf{n}$ et $\partial_t \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$ coïncident sur $\Gamma$. Par définition de $\mathcal{E}_1'$, nous avons :

$$\|\partial_t \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \leq -\mathcal{E}_1'(t). \tag{4.29}$$

De plus, comme $\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^* = \partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}$, la deuxième équation du système (4.1) nous donne l'estimation :

$$\|\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\partial_t^2 \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\tau]\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\eta]\partial_t \mathbf{Q}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right). \tag{4.30}$$

Par ailleurs, d'après (4.26), nous avons :

$$\|[\tau]\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C||\partial_t \mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t), \tag{4.31}$$

et :

$$||[\eta]\partial_t \mathbf{Q}(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = ||[\eta]^2 \mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C||\mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}'(t). \tag{4.32}$$

On déduit le résultat attendu des estimations (4.28), (4.29), , (4.30), (4.31) et (4.32). $\square$

En appliquant exactement la même démonstration à $\mathbf{H}^*$, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 4.3.6** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$||\partial_t \mathbf{H}^*(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) \right).$$

Nous estimons maintenant la norme de $\partial_t \nabla p$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

**Lemme 4.3.7** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|\partial_t \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1^{'}(t) - \mathcal{E}^{'}(t) \right).$$

**Preuve.** Nous procédons en deux étapes : on estime tout d'abord la norme de $\partial_t \nabla p$ dans $\mathbb{L}^2(\omega_+)$, puis on applique le lemme 4.2.2 pour étendre l'estimation à $\Omega$ tout entier. Évidemment, nous pourrions estimer la norme de $\partial_t \nabla p$ directement mais l'estimation ferait alors intervenir la norme de $\partial_t \mathbf{E}$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui est une des quantités que l'on cherche à estimer. Nous avons :

$$\|\partial_t \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} = \|\partial_t (\mathbf{E} - \mathbf{E}^*)\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)},$$

donc :

$$\|\partial_t \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq 2 \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|\partial_t \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \right),$$

d'où, grâce à (4.25) et (4.27) :

$$\|\partial_t \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq C \left( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1^{'}(t) - \mathcal{E}^{'}(t) \right).$$

Cela entraîne, après application du lemme 4.2.2, l'estimation attendue. $\square$

La même démonstration permet d'estimer la norme de $\partial_t \nabla q$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ :

**Lemme 4.3.8** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|\partial_t \nabla q\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|\partial_t \mathbf{H}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \right).$$

Ensuite, nous déduisons de ce qui précède l'estimation suivante :

**Proposition 4.3.9** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\mathcal{E}_1(t) \leq C\Big( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) \Big).$$

**Preuve.** Nous avons :

$$\|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|\partial_t \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\partial_t \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Grâce aux lemmes 4.3.5 et 4.3.7, cela entraîne :

$$\|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\Big( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) \Big). \tag{4.33}$$

De même, en appliquant la décomposition de $\partial_t \mathbf{H}$ et les lemmes 4.3.6 et 4.3.8, nous avons :

$$\|\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\Big( \mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) \Big). \tag{4.34}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\|\partial_t \mathbf{P}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|[\nu]\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \quad \text{et} \quad \|\partial_t \mathbf{Q}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|[\eta]\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)};$$

donc, grâce à (4.25) et (4.26) :

$$\|\partial_t \mathbf{P}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{E}'(t) \quad \text{et} \quad \|\partial_t \mathbf{Q}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{E}'(t). \tag{4.35}$$

Les estimations (4.33), (4.34) et (4.35) permettent de conclure. $\square$

Cette proposition permet de contrôler $\displaystyle\int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt$ et $\mathcal{F}(0)$.

**Proposition 4.3.10** *Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :*

$$\forall T > 0, \qquad \int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \le C_1 \left( \int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt + \mathcal{F}(0) \right). \tag{4.36}$$

**Preuve.** Soit $T > 0$. Comme $\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, la proposition 4.3.9 montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\mathcal{F}(t) \le C\Big(\mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t)\Big),$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt &\le C\left(\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt + \mathcal{E}_1(0) + \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}_1(T) - \mathcal{E}(T)\right)\\ &\le C\left(\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt + \mathcal{E}_1(0) + \mathcal{E}(0)\right).\end{aligned}$$

Mais, d'après le lemme 4.3.3, nous avons $\mathcal{E}(0) \le C\mathcal{E}_1(0)$. Comme $\mathcal{E}_1 \le \mathcal{F}$, on obtient (4.36). □

**Deuxième étape : contrôle de $\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt$.**

Afin de contrôler ce terme, nous allons utiliser une identité qui a été écrite la première fois dans [88] pour le système des équations de Maxwell posé dans le vide et couplé à la condition de Silver-Müller. Dans notre cas, nous appliquons cette identité aux vecteurs $\partial_t^2\mathbf{E}^*$ et $\partial_t^2\mathbf{H}^*$ qui sont à divergence nulle dans $\Omega$. Le couple $(\partial_t^2\mathbf{E}^*, \partial_t^2\mathbf{H})$ est solution du système d'inconnue $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ :

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t\mathbf{F} - \operatorname{rot}\mathbf{G} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega\times]0,\infty[,\\ \partial_t\mathbf{G} + \operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{g} & \text{dans } \Omega\times]0,\infty[,\\ \operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{G} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,\infty[,\\ \mathbf{F}(\mathbf{x},0) = \mathbf{F_0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{G}(\mathbf{x},0) = \mathbf{G_0}(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega,\\ (\mathbf{F}\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n} + \mathbf{G}\wedge\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,\infty[;\end{array}\right. \tag{4.37}$$

avec

$$\mathbf{f} = -[\sigma]\partial_t^2\mathbf{E} - [\nu]\partial_t^2\mathbf{P} - \nabla\partial_t^3 p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{g} = -[\tau]\partial_t^2\mathbf{H} - [\nu]\partial_t^2\mathbf{Q} - \nabla\partial_t^3 q.$$

Notons $\mathbf{F} = \partial_t^2\mathbf{E}^*$, $\mathbf{G} = \partial_t^2\mathbf{H}$ et

$$\widetilde{\mathcal{E}_2}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{G}|^2)\,d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\Big(||\mathbf{F}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + ||\mathbf{G}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\Big).$$

Comme $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont à divergence nulle, on a, d'après [88] :

$$\begin{aligned}\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}_2}(t)\,dt &= \int_\Omega \Big(\mathbf{F}(T,\cdot)\wedge\mathbf{G}(T,\cdot) - \mathbf{F}(0,\cdot)\wedge\mathbf{G}(0,\cdot)\Big)\cdot\mathbf{m}\,d\mathbf{x}\\ &+ \int_0^T\int_\Gamma (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{n})\Big(\frac{|\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{G}|^2}{2} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{F})(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{F}) - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{G})(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{G})\Big)d\Gamma\,dt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega (\mathbf{f}\wedge\mathbf{G})\cdot\mathbf{m}\,d\mathbf{x} + \int_0^T\int_\Omega (\mathbf{F}\wedge\mathbf{g})\cdot\mathbf{m}\,d\mathbf{x},\end{aligned} \tag{4.38}$$

où $\mathbf{m}$ est un vecteur vérifiant $\operatorname{div}\mathbf{m} = 3$ et $\partial_j\, m_k = 0$ pour $j \ne k$. Nous établissons alors le résultat suivant.

**Proposition 4.3.11** *On suppose que $\Omega$ est étoilé par rapport à un point $\mathbf{x_0}$ de $\mathbb{R}^3$ et on pose $\mathbf{m}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$. Alors, il existe une constante $C_\mathbf{m} > 0$ (dépendant de $\mathbf{m}$) telle que :*

$$\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt \le C_\mathbf{m}\left(\mathcal{E}_2(0) - \int_0^T \mathcal{E}_2'(t)\,dt + \int_0^T ||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt\right).$$

**Preuve.** En notant

$$R_\mathbf{m} = \operatorname*{Sup}_{\mathbf{x}\in\Omega} |\mathbf{m}(\mathbf{x})| \quad \text{ et } \quad R^*_\mathbf{m} = \operatorname*{Sup}_{\mathbf{x}\in\Gamma} \frac{(\mathbf{m}(\mathbf{x})\cdot \boldsymbol{n}(\mathbf{x}))^2 + |\mathbf{m}(\mathbf{x})|}{2\mathbf{m}(\mathbf{x})\cdot \boldsymbol{n}(\mathbf{x})},$$

nous avons, grâce à l'identité (4.38) :

$$\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt \le R_\mathbf{m}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_2(T) + \widetilde{\mathcal{E}}_2(0)\Big) + \frac{R^*_\mathbf{m}}{2}\int_0^T \Big(\|\mathbf{F}\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} + \|\mathbf{G}\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}\Big)dt$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^T \Big(||\mathbf{F}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + ||\mathbf{G}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\Big)dt + \int_0^T ||\mathbf{f}\wedge\mathbf{m}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||\mathbf{g}\wedge\mathbf{m}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt. \quad (4.39)$$

La définition de $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ et la décroissance de $\mathcal{E}_2$ entraînent :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_2(T) + \widetilde{\mathcal{E}}_2(0) \le C\Big(\mathcal{E}_2(T) + \mathcal{E}_2(0)\Big) \le C\mathcal{E}_2(0). \quad (4.40)$$

De plus, on a :

$$\int_0^T ||\mathbf{f}\wedge\mathbf{m}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt \le C\int_0^T ||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt, \quad (4.41)$$

et :

$$\int_0^T ||\mathbf{g}\wedge\mathbf{m}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt \le C\int_0^T ||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt \quad (4.42)$$

Par ailleurs, nous avons aussi :

$$\|\mathbf{F}\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} + \|\mathbf{G}\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} = \|\partial_t^2\mathbf{E}^*\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} + \|\partial_t^2\mathbf{H}^*\wedge\mathbf{n}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \le -C\mathcal{E}_2'(t). \quad (4.43)$$

En injectant (4.40), (4.41), (4.42) et (4.43) dans (4.39), on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt \le C_\mathbf{m}\left(\mathcal{E}_2(0) - \int_0^T \mathcal{E}_2'(t)\,dt + \int_0^T ||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt\right). \quad \square$$

Nous poursuivons en contrôlant les normes de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

**Lemme 4.3.12** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + ||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le -C\mathcal{F}'(t)$$

**Preuve.** Rappelons que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont définies :

$$\mathbf{f} = -[\sigma]\partial_t^2\mathbf{E} - [\nu]\partial_t^2\mathbf{P} - \nabla\partial_t^3 p, \qquad \mathbf{g} = -[\tau]\partial_t^2\mathbf{H} - [\nu]\partial_t^2\mathbf{Q} - \nabla\partial_t^3 q.$$

Grâce à (4.25), nous avons tout d'abord :

$$||[\sigma]\partial_t^2\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le C||\partial_t^2\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \le -C\mathcal{E}_2'(t) \le -C\mathcal{F}'(t), \quad (4.44)$$

et :

$$||[\nu]\partial_t^2\mathbf{P}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = ||[\nu]^2\partial_t\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C||\partial_t\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t) \leq -C\mathcal{F}'(t). \tag{4.45}$$

Par ailleurs, le raisonnement utilisé dans la preuve de la proposition 4.2.9 permet de contrôler la norme de $\nabla\partial_t^3 p$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En effet :

$$\left(\partial_t^3\mathbf{E} - \mathrm{rot}\,\partial_t^2\mathbf{H} + [\sigma]\partial_t^2\mathbf{E} + [\nu]\partial_t^2\mathbf{P}, \nabla\partial_t^3 p\right) = 0,$$

donc :

$$||\nabla\partial_t^3 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\left([\sigma]\partial_t^2\mathbf{E} + [\nu]\partial_t^2\mathbf{P}, \nabla\partial_t^3 p\right),$$

d'où :

$$||\nabla\partial_t^3 p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|[\sigma]\partial_t^2\mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\nu]\partial_t^2\mathbf{P}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

D'après (4.44) et (4.45), on a alors :

$$||\nabla\partial_t^3 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{F}'(t) \tag{4.46}$$

Les estimations (4.44), (4.45) et (4.46) prouvent alors que :

$$||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{F}'(t).$$

Enfin, en appliquant exactement le même raisonnement à $\mathbf{g}$, on montre que :

$$||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{F}'(t). \quad \square$$

Nous déduisons maintenant de la proposition 4.3.11 le contrôle de $\displaystyle\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt$.

**Proposition 4.3.13** *Sous les hypothèses de la proposition 4.3.11, il existe une constante* $C_{\mathbf{m}} > 0$ *telle que :*

$$\forall T > 0, \qquad \int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt \leq C_{\mathbf{m}}\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + \mathcal{F}(0)\right). \tag{4.47}$$

**Preuve.** Fixons $T > 0$. Comme $\mathcal{E}_2 \leq \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' \leq \mathcal{E}_2'$, la proposition 4.3.11 montre que :

$$\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}_2}(t)\,dt \leq C_{\mathbf{m}}\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + \mathcal{F}(0) + \int_0^T ||\mathbf{f}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||\mathbf{g}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt\right),$$

ce qui entraîne, grâce au lemme 4.3.12 :

$$\int_0^T \widetilde{\mathcal{E}_2}(t)\,dt \leq C_{\mathbf{m}}\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + \mathcal{F}(0)\right). \tag{4.48}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(t) &= \widetilde{\mathcal{E}_2}(t) + \frac{1}{2}||\nabla\partial_t^2 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\partial_t^2\mathbf{P}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\nabla\partial_t^2 q||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\partial_t^2\mathbf{Q}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &= \widetilde{\mathcal{E}_2}(t) + \frac{1}{2}||\nabla\partial_t^2 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||[\nu]\partial_t\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\nabla\partial_t^2 q||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||[\eta]\partial_t\mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et nous avons vu dans dans la preuve de la proposition 4.2.9 que :

$$
\begin{aligned}
&||\nabla \partial_t^2 p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|[\sigma]\partial_t \mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\nu]\partial_t \mathbf{P}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\\
&||\nabla \partial_t^2 q||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|[\tau]\partial_t \mathbf{H}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|[\eta]\partial_t \mathbf{Q}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

donc, grâce à (4.25) et (4.26) :

$$
\begin{aligned}
&||\nabla \partial_t^2 p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\Big(\|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\Big) \leq -C\Big(\mathcal{E}_1'(t) + \mathcal{E}'(t)\Big),\\
&||\nabla \partial_t^2 q||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\Big(\|\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|\mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\Big) \leq -C\Big(\mathcal{E}_1'(t) + \mathcal{E}'(t)\Big).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, toujours d'après (4.25) et (4.26) :

$$
\begin{aligned}
&\|[\nu]\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t),\\
&\|[\eta]\partial_t \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\mathcal{E}_1'(t).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt &\leq \int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt + C\Big(\mathcal{E}_1(0) - \mathcal{E}_1(T) + \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)\Big)\\
&\leq \int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt + C\Big(\mathcal{E}_1(0) + \mathcal{E}(0)\Big).
\end{aligned}
$$

Comme $\mathcal{E}(0) \leq C\mathcal{E}_1(0)$ (lemme 4.3.3) et $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{F}$, on obtient :

$$
\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\,dt \leq \int_0^T \widetilde{\mathcal{E}}_2(t)\,dt + C\mathcal{F}(0),
$$

ce qui démontre le résultat d'après (4.48). □

**Trosième étape : preuve de l'estimation (4.24).**
Nous déduisons de ce qui précède la proposition suivante.

**Proposition 4.3.14** *Sous les hypothèses de la proposition 4.3.11, il existe $T > 0$ et des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 \in ]0, T[$ telles que :*

$$
\int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \leq -C_1 \int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + C_2\mathcal{F}(0).
$$

**Preuve.** Les propositions 4.3.10 et 4.3.13 montrent qu'il existe des constantes $C_1$ et $C_{\mathbf{m}}$ strictement positives telles que :

$$
\forall T > 0, \quad \int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \leq -C_1 C_{\mathbf{m}} \int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + C_1\big(C_{\mathbf{m}} + 1\big)\mathcal{F}(0),
$$

ce qui donne le résultat en choisissant $T > C_1\big(C_{\mathbf{m}} + 1\big)$. □

Nous venons d'établir l'estimation (4.24), ce qui prouve, comme nous l'avons vu, (4.22) puis (4.21) grâce au lemme 4.3.2. Nous pouvons alors énoncer le théorème que nous avons obtenu.

**Théorème 4.3.15** *On suppose que $\Omega$ est étoilé par rapport à un point $\mathbf{x_0}$ de $\mathbb{R}^3$ et que les hypothèses $(\mathcal{H})$ sont vérifiées. Alors, il existe des constantes $C > 0$ et $\beta > 0$ telles que :*

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{F}(t) \leq C e^{-\beta t} \mathcal{F}(0).$$

**Remarque 4.3.16** *Notons qu'il est possible de généraliser le résultat que nous venons d'obtenir au cas où, dans $\omega_-$, le système des équations de Maxwell est posé en milieu hétérogène. En effet, on remplace alors les constantes $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ par des fonctions $\varepsilon$ et $\mu$ dépendant de $\mathbf{x}$ et on applique une identité semblable à (4.38) et valable dans ce cas (voir [51]). Le reste de la preuve reste inchangé.*

### 4.3.4 Complément

Dans le paragraphe 4.3.3, nous avons démontré la décroissance exponentielle de l'énergie $\mathcal{F}$ dans le cas où l'ouvert $\Omega$ est étoilé par rapport à un point de $\mathbb{R}^3$. Nous montrons maintenant que ce résultat s'étend à d'autres types d'ouverts, mais sur un modèle plus simple obtenu en prenant $[\tau] = [\eta] = 0$ dans (4.1). Pour cela, nous appliquons une estimation d'observabilité obtenue par Phung [111] à partir d'une hypothèse géométrique. Nous commençons par donner une définition [111].

**Définition 4.3.17** *Soit $\Gamma_k$ une partie ouverte de $\Gamma$ et $T_0 > 0$. On dit que $\Gamma_k$ contrôle géométriquement $\Omega$ s'il existe un compact $\widetilde{\Gamma}_k$ de $\Gamma_k$ tel que tout rayon rencontre $\overline{\Gamma}_k \times ]0, T_0[$ en un point non diffractif.*

En particulier, la frontière $\Gamma$ d'un ouvert convexe $\Omega$ contrôle géométriquement $\Omega$. Nous avons alors le théorème suivant [111].

**Théorème 4.3.18** *Soit $\Gamma_k$ une partie ouverte de $\Gamma$ et $T_0 > 0$ tels que $\Gamma_k$ contrôle géométriquement $\Omega$. Soit $T > T_0$ et $\mathbf{V}$ solution de :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 \boldsymbol{V} - \Delta \mathbf{V} = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \times ]0, T[, \\ \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{et} \quad \textit{rot}\, \mathbf{V} \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{sur} \quad (\Gamma \setminus \Gamma_k) \times ]0, T[, \end{cases}$$

*tel que $\mathbf{V}_{|\Gamma} \in \mathbb{L}^2(\Gamma \times ]0, T[)$ et $\partial_{\boldsymbol{n}} \mathbf{V} \in \mathbb{H}^{-1}(\Gamma \times ]0, T[)$. Alors, il existe $C > 0$ telle que :*

$$||\mathbf{V}||_{\mathbb{L}^2(\Omega \times ]0,T[)} \leq C \Big( ||\partial_{\boldsymbol{n}} \mathbf{V}||_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma \times ]0,T[)} + ||\mathbf{V}||_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times ]0,T[)} \Big).$$

Dans notre cas, nous allons supposer que l'hypothèse géométrique suivante est vérifiée :

$$\{\Gamma, T_0\} \text{ contrôle géométriquement } \Omega. \tag{4.49}$$

Ainsi, nous faisons dans ce paragraphe les hypothèses $(\widetilde{\mathcal{H}})$ suivantes :

- $(i)$ Les données $\mathbf{E_0}$ et $\mathbf{H_0}$ sont telles que :
  $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in D(A^3)$,
  $\text{Supp}(\mathbf{E_0}) \subset \omega_-, \quad \text{Supp}(\mathbf{H_0}) \subset \omega_-, \quad \text{div}\, \mathbf{E_0} = \text{div}\, \mathbf{H_0} = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_-,$
- $(ii)$ le tenseur $[\sigma]$, à support dans $\omega_+$, est défini positif sur $\mathbb{L}^2(\omega_+)$,
- $(iii)$ $[\tau] = [\nu] = 0$,
- $(iii)$ $\{\Gamma, T_0\}$ contrôle géométriquement $\Omega$.

Sous les hypothèses $(\widetilde{\mathcal{H}})$, nous obtenons, comme au paragraphe 4.3.3, la proposition 4.3.10. Cette proposition a été obtenue seulement à partir des hypothèses $(i)$ et $(ii)$, et le fait de prendre $[\tau]$ et $[\eta]$ nuls ne change rien. En effet, la seule différence se situe au niveau du lemme 4.3.5 : puisque $[\tau] = [\eta] = 0$, nous n'avons pas (4.30) mais :

$$\|\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^*\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\partial_t^2 \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

donc, d'après (4.28) :

$$||\partial_t \mathbf{E}^*(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\left(\mathcal{E}_2(t) - \mathcal{E}_1'(t)\right),$$

et la conclusion du lemme 4.3.5 reste inchangée puisque $-\mathcal{E}' \geq 0$. Ainsi, nous sommes ramenés à établir, sous les nouvelles hypothèses $(\widetilde{\mathcal{H}})$, la deuxième étape de la preuve du paragraphe 4.3.3, c'est-à-dire à contrôler l'intégrale de $\mathcal{E}_2(t)$. Pour cela, nous commençons par estimer le champ magnétique en fonction du champ électrique et de $\mathcal{F}(0)$.

**Proposition 4.3.19** *Soit $T > 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{H}(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E}(t,.)||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt + C\mathcal{F}(0). \tag{4.50}$$

**Preuve.** Comme $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ appartient à $D(A^2)$, $\partial_t^2 \mathbf{H} = -\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}$ est dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et on a :

$$||\partial_t^2 \mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -(\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}, \partial_t^2 \mathbf{H}).$$

Comme $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ appartient à $D(A^3)$, $\mathrm{rot}\, \partial_t^2 \mathbf{E}$ est aussi dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et l'égalité précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= -\left[(\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H})\right]_0^T + \int_0^T (\mathrm{rot}\, \partial_t^2 \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H}) dt \\
&= -\left[(\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H})\right]_0^T + \int_0^T (\partial_t^2 \mathbf{E}, \mathrm{rot}\, \partial_t \mathbf{H}) dt \\
&\qquad + \int_0^T \left(\int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \left(\partial_t^2 \mathbf{E} \wedge \partial_t \mathbf{H}\right) d\Gamma\right) dt \\
&= -\left[(\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H})\right]_0^T + \int_0^T (\partial_t^2 \mathbf{E}, \partial_t^2 \mathbf{E} + [\sigma]\partial_t \mathbf{E} + [\nu]\partial_t \mathbf{P}) dt \\
&\qquad + \int_0^T \left(\int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \left(\partial_t^2 \mathbf{E} \wedge \partial_t \mathbf{H}\right) d\Gamma\right) dt \\
&= -\left[(\partial_t \mathrm{rot}\, \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H})\right]_0^T + \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T (\partial_t^2 \mathbf{E}, [\sigma]\partial_t \mathbf{E})\, dt \\
&\qquad + \int_0^T (\partial_t^2 \mathbf{E}, [\nu]\partial_t \mathbf{P})\, dt + \int_0^T \left(\int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \left(\partial_t^2 \mathbf{E} \wedge \partial_t \mathbf{H}\right) d\Gamma\right) dt.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

De plus, nous avons :

$$\int_0^T (\partial_t^2 \mathbf{E}, [\sigma]\partial_t \mathbf{E})\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\partial_t \mathbf{E}, [\sigma]\partial_t \mathbf{E})\, dt = \frac{1}{2}\left(\partial_t \mathbf{E}(T,\cdot), [\sigma]\partial_t \mathbf{E}(T,\cdot)\right), \tag{4.52}$$

car $[\sigma]\partial_t\mathbf{E_0} = 0$ puisque $\mathrm{Supp}([\sigma]) \cap \mathrm{Supp}(\partial_t\mathbf{E_0}) = \emptyset$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\partial_t^2\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\, dt &= \left[(\partial_t\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\right]_0^T - \int_0^T (\partial_t\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\, dt \\
&= \left[(\partial_t\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\right]_0^T - \int_0^T (\partial_t\mathbf{E}, [\nu]^2\mathbf{E})\, dt \\
&= \left[(\partial_t\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\right]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\mathbf{E}, [\nu]^2\mathbf{E})\, dt \\
&= \left[(\partial_t\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\right]_0^T + \frac{1}{2}(\mathbf{E_0}, [\nu]^2\mathbf{E_0}) - \frac{1}{2}(\mathbf{E}(T,\cdot), [\nu]^2\mathbf{E}(T,\cdot)).
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P_0} = \mathbf{0}$ et $[\nu]^2\mathbf{E_0} = \mathbf{0}$ (car $\mathrm{Supp}([\nu]) \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{E_0}) = \emptyset$), nous obtenons :

$$\int_0^T (\partial_t^2\mathbf{E}, [\nu]\partial_t\mathbf{P})\, dt = \Big(\partial_t\mathbf{E}(T,\cdot), [\nu]\partial_t\mathbf{P}(T,\cdot)\Big) \underbrace{-\frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(T,\cdot), [\nu]^2\mathbf{E}(T,\cdot)\Big)}_{\leq 0}. \tag{4.53}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{n}\cdot\left(\partial_t^2\mathbf{E}\wedge\partial_t\mathbf{H}\right) d\Gamma &= \int_\Gamma \partial_t^2\mathbf{E}\cdot(\partial_t\mathbf{H}\wedge\mathbf{n})\, d\Gamma \\
&= -\int_\Gamma \left(\mathbf{n}\cdot\left(\partial_t^2\mathbf{E}\wedge\mathbf{n}\right)\right)\cdot((\partial_t\mathbf{E}\wedge\mathbf{n})\wedge\mathbf{n})\, d\Gamma \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\partial_t\mathbf{E}\wedge\mathbf{n}||^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^T \left(\int_\Gamma \mathbf{n}\cdot\left(\partial_t^2\mathbf{E}\wedge\partial_t\mathbf{H}\right) d\Gamma\right) dt = -\frac{1}{2}||\partial_t\mathbf{E}(T,\cdot)\wedge\mathbf{n}||^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \leq 0, \tag{4.54}$$

car $\partial_t\mathbf{E_0} = \mathbf{E_1}$ est nul sur $\Gamma$. En injectant (4.52), (4.53) et (4.54) dans (4.51), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||\partial_t^2\mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -\left[(\partial_t\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \partial_t\mathbf{H})\right]_0^T + \int_0^T ||\partial_t^2\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
+\frac{1}{2}(\partial_t\mathbf{E}(T,\cdot), [\sigma]\partial_t\mathbf{E}(T,\cdot)) + (\partial_t\mathbf{E}(T,\cdot), [\nu]\partial_t\mathbf{P}(T,\cdot)).
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{F}$ sont décroissantes, avec $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}_2 \leq \mathcal{F}$, nous avons donc :

$$\int_0^T ||\partial_t^2\mathbf{H}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \int_0^T ||\partial_t^2\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + C\mathcal{F}(0). \quad \square$$

À l'aide de cette proposition, on se ramène donc à estimer uniquement la norme de $\partial_t^2\mathbf{E}$. Pour contrôler ce terme, nous utilisons toujours la décomposition $\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + \nabla p$ et nous cherchons à estimer les normes des termes $\partial_t^2\mathbf{E}^*$ et $\nabla\partial_t^2 p$. Écrivons maintenant le modèle dont est solution le champ à divergence nulle $\mathbf{E}^*$. Il vérifie une équation d'ondes avec second membre de la forme :

$$\partial_t^2\mathbf{E}^* - \Delta\mathbf{E}^* = -[\sigma]\partial_t\mathbf{E} - [\nu]^2\mathbf{E} - \partial_t^2\nabla p,$$

avec la condition de bord :

$$(\partial_t\mathbf{E}^*\wedge n)\wedge n - \mathrm{rot}\,\mathbf{E}^*\wedge n = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma.$$

C'est ici que le résultat d'observabilité va être fondamental. Nous décomposons le champ $\mathbf{E}^*$ en $\mathbf{E}^* = \mathbf{E_1^*} + \mathbf{E_2^*}$, où $\mathbf{E_1^*}$ et $\mathbf{E_2^*}$ sont respectivement solution des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 \mathbf{E_1^*} - \Delta \mathbf{E_1^*} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{E_1^*} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ (\partial_t \mathbf{E_1^*} \wedge n) \wedge n - \operatorname{rot} \mathbf{E_1^*} \wedge n = 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[; \end{array}\right. \tag{4.55}$$

et :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 \mathbf{E_2^*} - \Delta \mathbf{E_2^*} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{E_2^*} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{E_2^*}(\mathbf{x},0) = \partial_t \mathbf{E_2^*}(\mathbf{x},0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (\partial_t \mathbf{E_2^*} \wedge n) \wedge n - \operatorname{rot} \mathbf{E_2^*} \wedge n = 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{array}\right. \tag{4.56}$$

avec :

$$\mathbf{f} = -[\sigma]\partial_t \mathbf{E} - [\nu]^2 \mathbf{E} - \partial_t^2 \nabla p.$$

Sous l'hypothèse de contrôle géométrique (4.49), la solution $\mathbf{E_1^*}$ du problème (4.55) vérifie, pour $T > T_0$, l'estimation suivante (voir [111]) :

$$\exists C > 0, \qquad \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_1^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_1^*} \wedge \mathbf{n}||^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}\, dt,$$

d'où :

$$\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_1^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E}^* \wedge \mathbf{n}||^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}\, dt \leq -C \int_0^T \mathcal{E}_2'(t)\, dt;$$

et on obtient donc :

$$\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_1^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq -C \int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt. \tag{4.57}$$

Par ailleurs, la solution $\mathbf{E_2^*}$ du problème (4.56) vérifie l'estimation suivante (voir [111]) :

$$\exists C > 0, \qquad \int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_2^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C \int_0^T ||\, \mathbf{f}\, ||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt. \tag{4.58}$$

Or, nous avons :

$$||\, \mathbf{f}\, ||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = || - [\sigma]\partial_t \mathbf{E} - [\nu]^2 \mathbf{E} - \partial_t^2 \nabla p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( ||\mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + ||\partial_t \mathbf{E}||^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + ||\partial_t^2 \nabla p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right),$$

ce qui entraîne, d'après (4.25) :

$$||\, \mathbf{f}\, ||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left( -\mathcal{E}_1'(t) - \mathcal{E}'(t) + ||\partial_t^2 \nabla p||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right). \tag{4.59}$$

Par ailleurs, nous avons montré dans la preuve de la proposition 4.2.9 que :

$$\|\partial_t^2 \nabla p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|[\sigma]\partial_t \mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|[\nu]\partial_t \mathbf{P}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)},$$

c'est-à-dire :

$$\|\partial_t^2 \nabla p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|[\sigma]\partial_t \mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|[\nu]^2 \mathbf{E}\|_{\mathbb{L}^2(\omega_+)},$$

donc, grâce à (4.25) :

$$\|\partial_t^2 \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\Big(\|\mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)} + \|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\Big) \leq -C\Big(\mathcal{E}'(t) + \mathcal{E}_1'(t)\Big). \tag{4.60}$$

D'après (4.59) et (4.60), nous avons alors :

$$|| \, \mathbf{f} \, ||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq -C\Big(\mathcal{E}'(t) + \mathcal{E}_1'(t)\Big).$$

En injectant cette inégalité dans (4.58), on obtient :

$$\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_2^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{E}_1'(t)\, dt + \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)\right) \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{E}(0)\right),$$

d'où :

$$\int_0^T ||\partial_t^2 \mathbf{E_2^*}||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right), \tag{4.61}$$

puisque $\mathcal{E}(0) \leq C\mathcal{E}_1(0) \leq C\mathcal{F}(0)$. De même, d'après (4.60) :

$$\int_0^T \|\partial_t^2 \nabla p\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{E}_1'(t)\, dt + \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)\right) \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right). \tag{4.62}$$

Comme $\partial_t^2 \mathbf{E} = \partial_t^2 \mathbf{E_1^*} + \partial_t^2 \mathbf{E_2^*} + \partial_t^2 \nabla p$, les estimations (4.57), (4.61) et (4.62) permettent finalement de contrôler la norme de $\partial_t^2 \mathbf{E}$ de la façon suivante :

$$\int_0^T \|\partial_t^2 \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right).$$

Nous énonçons maintenant le résultat que nous venons d'obtenir.

**Proposition 4.3.20** *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall T > T_0, \quad \int_0^T \|\partial_t^2 \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right).$$

Nous déduisons des propositions 4.3.19 et 4.3.20 le contrôle de $\displaystyle\int_0^T \mathcal{E}_2(t)\, dt$.

**Proposition 4.3.21** *Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :*

$$\forall T > T_0, \quad \int_0^T \mathcal{E}_2(t)\, dt \leq C_2\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right). \tag{4.63}$$

**Preuve.** Les propositions 4.3.19 et 4.3.20 montrent qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall T > T_0, \quad \int_0^T \Big(\|\partial_t^2 \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\partial_t^2 \mathbf{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\Big) dt \leq C\left(-\int_0^T \mathcal{F}'(t)\, dt + \mathcal{F}(0)\right). \tag{4.64}$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_0^T \|\partial_t^2 \mathbf{P}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, dt = \int_0^T \|[\nu]\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\, dt \leq C\int_0^T \|\partial_t \mathbf{E}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega_+)}\, dt \leq -C\int_0^T \mathcal{E}_1'(t)\, dt,$$

la dernière inégalité résultant de (4.25). Nous avons donc :

$$\int_0^T \|\partial_t^2 \mathbf{P}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,dt \leq -C\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt. \tag{4.65}$$

Les estimations (4.64) et (4.65) donnent le résultat. □

La proposition 4.3.21 permet alors de prouver l'estimation 4.24 et de conclure. En effet, nous avons alors le résultat suivant.

**Proposition 4.3.22** *Sous les hypothèses* $(\widetilde{\mathcal{H}})$*, il existe* $T > 0$ *et des constantes* $C_1 > 0$ *et* $C_2 \in ]0, T[$ *telles que :*

$$\int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \leq -C_1\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + C_2\mathcal{F}(0).$$

**Preuve.** Les propositions 4.3.10 et 4.3.21 montrent qu'il existe des constantes $C_1$ et $C_2$ strictement positives telles que :

$$\forall T > T_0, \qquad \int_0^T \mathcal{F}(t)\,dt \leq -C_1C_2\int_0^T \mathcal{F}'(t)\,dt + C_1\big(C_2+1\big)\mathcal{F}(0),$$

ce qui donne le résultat en choisissant $T > \mathrm{Max}\,\big\{C_1\big(C_2+1\big), T_0\big\}$. □

Ainsi, nous obtenons (4.21) sous des hypothèses différentes.

**Théorème 4.3.23** *On suppose que les hypothèses* $(\widetilde{\mathcal{H}})$ *sont vérifiées. Alors, il existe des constantes* $C > 0$ *et* $\beta > 0$ *telles que :*

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{F}(t) \leq Ce^{-\beta t}\mathcal{F}(0).$$

# Chapitre 5

# Application aux *Perfectly Matched Layers*

## 5.1 Introduction

Dans ce travail, nous présentons un modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées pour le système des équations de Maxwell en trois dimensions. Ce modèle est obtenu à partir du système $(\mathcal{P})$ présenté au chapitre 3, mais dans le cas où $[\nu]$ et $[\eta]$ sont des opérateurs pseudo-différentiels (et non plus des tenseurs de fonctions). C'est un modèle PML non *splitté* qui repose sur l'introduction d'inconnues auxiliaires. D'une certaine manière, on peut le voir comme une extension à trois dimensions du modèle 2D présenté dans [2] ou [113]. Comme nous le détaillons plus loin, nous préférons voir ce modèle comme le système de Maxwell posé dans un milieu anisotrope et nous développons une analyse qui permet de le comparer à d'autres modèles [115]. Dans notre étude, nous considérons des coefficients d'absorption variables. Comme nous l'avons dit en introduction, cela rend l'étude mathématique plus délicate.

Nous considérons le système des équations de Maxwell en trois dimensions, formulées dans l'espace libre :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}; \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ désignent les constantes diélectrique et magnétique du vide.
Dans la suite, nous notons $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ la variable d'espace. Nous allons présenter un modèle de couche absorbante dans la direction des $x$. Dans ce qui suit, le demi-espace $\{x < 0\}$ constitue l'espace libre et la couche est représentée par le demi-espace $\{x > 0\}$. Par ailleurs, on introduit des espaces de fonctions dépendant uniquement de la variable spatiale $x$ et nulles dans l'espace libre :

$$\Sigma = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \forall x < 0,\ f(x) = 0\},$$

$$\Sigma_+ = \{f \in \Sigma;\ \forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0\};$$

et on considère l'espace $M_\Sigma$ (respectivement $M_{\Sigma_+}$) des opérateurs diagonaux à coefficients dans $\Sigma$ (respectivement $\Sigma_+$). Pour définir l'action d'un élément de $M_\Sigma$ sur un vecteur de $\mathbb{C}^3$, on adopte la notation suivante :

$$\forall[\sigma] = \mathrm{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \in M_\Sigma, \quad \forall \mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3, \quad [\sigma]\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sigma_x\, u_x \\ \sigma_y\, u_y \\ \sigma_z\, u_z \end{bmatrix}.$$

Nous proposons alors de considérer le modèle suivant :

$$(\widetilde{\mathcal{P}}) \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [\nu]\mathbf{P} = \mathbf{0}, & (5.2) \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [\eta]\mathbf{Q} = \mathbf{0}, & (5.3) \\ \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{P} - [\nu]\mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{Q} - [\eta]\mathbf{H} = \mathbf{0}; \end{cases}$$

où $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^3$ ; $[\sigma]$ et $[\tau]$ (respectivement $[\nu]$ et $[\eta]$) désignent des éléments de $M_{\Sigma_+}$ (respectivement $M_\Sigma$).
Ce modèle est un système de type Maxwell couplé à deux équations différentielles ordinaires. Notons que, dans l'espace libre $\{x < 0\}$, le système formé par les équations (5.2) et (5.3) coïncide avec le système de Maxwell (5.1).

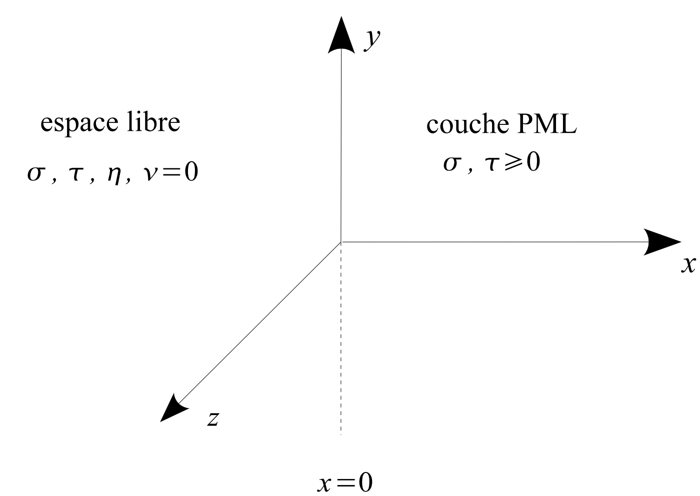



Fig. 5.1 – couche absorbante PML

Dans une première partie de ce chapitre, nous démontrons que $(\widetilde{\mathcal{P}})$ est un modèle PML (à condition de faire intervenir des opérateurs pseudo-différentiels). Pour cela, nous procèdons en deux temps. Nous commençons par supposer que les tenseurs $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\nu]$ et $[\eta]$ ne dépendent pas de $x$. Cette hypothèse suffit à définir un cadre favorable à l'application de l'analyse par ondes planes pour montrer qu'il est possible de choisir des tenseurs PML. Cette approche est la plus courante [18], [115], [135]. Notons que, dans [18], l'analyse est développée en considérant chacune des composantes des champs comme solution d'une des équations du système. Ici, nous adoptons la même démarche que dans [115], [135], en développant plutôt une analyse vectorielle, ce qui facilite l'interprétation des résultats. Plus précisément, on montre que toute solution onde plane du système de Maxwell est parfaitement transmise du milieu réel au milieu PML sous des hypothèses réalistes (H) portant sur les tenseurs $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\nu]$ et $[\eta]$. On étend ensuite le résultat au cas de tenseurs à coefficients variables en montrant que les conditions (H) dégagées précédemment sont suffisantes pour établir que le modèle est un modèle PML. Ce résultat s'appuie sur la résolution d'un système différentiel. L'écriture de ce système n'est pas conditionnée par (H). Toutefois, sans (H), sa résolution n'est pas évidente et ne garantit pas de conclure que le modèle est un modèle PML. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons au caractère bien posé du problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$. Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution PML.

## 5.2 Analyse du modèle par ondes planes

### 5.2.1 Définition

À l'aide d'une analyse par ondes planes, nous allons montrer que le modèle $(\widetilde{\mathcal{P}})$ est un modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées. Nous adoptons la définition proposée dans [113].

**Définition 5.2.1** *Un modèle PML est un modèle de couche pour lequel on a :*
*(i) transmission parfaite entre l'espace libre et la couche, quels que soient la fréquence et l'angle d'incidence,*
*(ii) décroissance exponentielle de la solution dans la couche.*

Nous allons proposer deux démonstrations. La première, valable dans le cas où les tenseurs $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\eta]$ et $[\nu]$ sont à coefficients constants, s'appuie sur des considérations physiques. La seconde, plus abstraite, repose sur la résolution d'un système différentiel et permet de traiter le cas général où les opérateurs de perturbation sont à coefficients variables. Néanmoins, l'étude du cas où les opérateurs sont constants (première démonstration) indique les hypothèses convenables à considérer pour traiter le cas général (seconde démonstration).

### 5.2.2 Analyse du modèle à coefficients constants

Dans cette partie, on se restreint au cas où les opérateurs $[\sigma]$ et $[\tau]$ (respectivement $[\eta]$ et $[\nu]$) de $M_{\Sigma_+}$ (respectivement $M_\Sigma$) sont à coefficients constants.
On cherche des ondes planes solutions de $(\widetilde{\mathcal{P}})$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi_0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x})}, \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}; \tag{5.4}$$

avec

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e_1} + k_y \mathbf{e_2} + k_z \mathbf{e_3}.$$

En injectant (5.4) dans le problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$, on obtient le système :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + \dfrac{[\nu]^2}{i\varepsilon_0\omega}\mathbf{E} = \mathbf{0}, & (5.5) \\ i\omega\mu_0 \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + \dfrac{[\eta]^2}{i\mu_0\omega}\mathbf{H} = \mathbf{0}, & (5.6) \\ i\omega\varepsilon_0 \mathbf{P} = [\nu]\mathbf{E}, \\ i\omega\mu_0 \mathbf{Q} = [\eta]\mathbf{H}. \end{cases}$$

Les équations (5.5) et (5.6) s'écrivent aussi sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{H} = \left(i\omega\varepsilon_0[1] + [\sigma] + \frac{[\nu]^2}{i\varepsilon_0\omega}\right)\mathbf{E}, \\ \\ &\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\left(i\omega\mu_0[1] + [\tau] + \frac{[\eta]^2}{i\mu_0\omega}\right)\mathbf{H}; \end{aligned}\right. \tag{5.7}$$

où [1] désigne la matrice identité. Nous avons donc :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\mathcal{M}\mathbf{E} \\ \\ &\mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathcal{N}\mathbf{H} \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 - i\dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} - \dfrac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i\dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega} - \dfrac{\nu_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} - \dfrac{\nu_z^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(m_x, m_y, m_z)$$

et

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 1 - i\dfrac{\tau_x}{\mu_0\omega} - \dfrac{\eta_x^2}{\mu_0^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i\dfrac{\tau_y}{\mu_0\omega} - \dfrac{\eta_y^2}{\mu_0^2\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\dfrac{\tau_z}{\mu_0\omega} - \dfrac{\eta_z^2}{\mu_0^2\omega^2} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(n_x, n_y, n_z).$$

Nous supposons désormais que les hypothèses de compatibilité suivantes sont satisfaites :

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \frac{[\sigma]}{\varepsilon_0} = \frac{[\tau]}{\mu_0}\,,$$

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \frac{[\nu]^2}{\varepsilon_0^2} = \frac{[\eta]^2}{\mu_0^2}\,.$$

La condition $(\mathrm{H}_1)$ correspond d'un point de vue physique à une condition d'impédance utilisée notamment par Bérenger [18] (voir aussi [2], [115]). Quant à la condition $(\mathrm{H}_2)$, elle est en quelque sorte une adaptation (mathématique) de cette condition au modèle introduit. En effet, grâce aux hypothèses $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_2)$, on a $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ et le système (5.8) devient :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\mathcal{M}\mathbf{E}, \\ \\ &\mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathcal{M}\mathbf{H}. \end{aligned}\right. \tag{5.9}$$

Dans ses travaux précurseurs, Bérenger [17] perturbait le système de Maxwell *via* l'introduction des conductivités $[\sigma]$ et $[\tau]$ et l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)$ lui permettait de récrire le modèle PML sous la forme (5.9). Cette écriture est ici encore valable sous les hypothèses $(\mathrm{H}_1)$ et $(\mathrm{H}_2)$.
Compte tenu de la forme des champs, le système (5.9) s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{k}\wedge\mathbf{H}=-\omega\varepsilon_0\mathcal{M}\mathbf{E},\\ \\ \mathbf{k}\wedge\mathbf{E}=\omega\mu_0\mathcal{M}\mathbf{H}.\end{array}\right. \tag{5.10}$$

Nous allons maintenant déterminer la relation de dispersion vérifiée par le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Pour cela, on introduit les changements de variable suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'&=\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}'&=\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{H}\\ \mathbf{k}'&=\frac{\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}}{(m_x m_y m_z)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Le système (5.10) donne alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{k}'\wedge\mathbf{H}'=-\omega\varepsilon_0\mathbf{E}'\\ \\ \mathbf{k}'\wedge\mathbf{E}'=\omega\mu_0\mathbf{H}'\end{array}\right.$$

d'où la relation :

$$\mathbf{k}'\wedge(\mathbf{k}'\wedge\mathbf{E}')=(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{E}')\mathbf{k}'-(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{E}'=-\omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}'.$$

Mais, par construction, $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{k}'$ sont orthogonaux et la relation se simplifie donc en :

$$\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'=\omega^2\varepsilon_0\mu_0.$$

On obtient finalement la relation de dispersion :

$$\frac{k_x^2}{m_y m_z}+\frac{k_y^2}{m_x m_z}+\frac{k_z^2}{m_x m_y}=k_0^2, \tag{5.11}$$

où $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est la norme du vecteur d'onde dans l'espace libre.
La courbe définie par l'équation (5.11) admet (en coordonnées curvilignes) la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}k_x=k_0\sqrt{m_y m_z}\sin\phi\cos\theta\\ k_y=k_0\sqrt{m_x m_z}\sin\phi\sin\theta\\ k_z=k_0\sqrt{m_x m_y}\cos\phi.\end{array}\right. \tag{5.12}$$

Dans ce qui précède, $m_x m_y$, $m_x m_z$ et $m_y m_z$ sont complexes et la racine carrée de ces nombres est définie à partir de la détermination principale du logarithme. Rappelons que la détermination principale du logarithme est l'application $z\mapsto \operatorname{Log} z$ définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ par :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\qquad \operatorname{Log} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z,$$

où $z\mapsto\operatorname{Arg} z$ est la détermination principale de l'argument (application continue de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ dans $]-\pi,\pi[$). Les racines carrées écrites ci-dessus sont alors définies par :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\qquad \sqrt{z}:=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}.$$

**Remarque 5.2.2** *Notons que, si les coefficients des tenseurs n'étaient pas constants,* $\mathbf{k}$ *dépendrait de* $x$ *et le raisonnement précédent ne pourrait pas s'appliquer. En effet, les systèmes (5.9) et (5.10) ne sont alors plus équivalents.*

On considère maintenant une onde plane incidente se propageant dans le plan $xy$ et qui traverse l'interface $\{x = 0\}$. On souhaite déterminer les coefficients de réflexion à cette interface. Les relations (5.12) deviennent :

$$\begin{cases} k_x = k_0\sqrt{m_y m_z}\cos\theta \\ k_y = k_0\sqrt{m_x m_z}\sin\theta \\ k_z = 0. \end{cases}$$

Si l'on se place en mode $\mathrm{TE}_z$, le champ électrique incident est de la forme :

$$\mathbf{E_i} = E_0 e^{i\omega t} e^{-ik_0(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)}\mathbf{e_3}$$

et les champs réfléchis et transmis s'écrivent :

$$\mathbf{E_r} = r^{\mathrm{TE}} E_0 e^{i\omega t} e^{-ik_0(-x\cos\theta_r + y\sin\theta_r)}\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{E_t} = t^{\mathrm{TE}} E_0 e^{i\omega t} e^{-ik_0(x\sqrt{m_y m_z}\cos\theta_t + y\sqrt{m_x m_z}\sin\theta_t)}\mathbf{e_3}$$

où $\theta_r = \theta_i$ (égalité prouvée au chapitre 2) et $r^{\mathrm{TE}}$ et $t^{\mathrm{TE}}$ désignent les coefficients de réflexion et de transmission en mode $\mathrm{TE}_z$. On déduit de ces valeurs et de (5.9) les champs magnétiques incident :

$$\mathbf{H_i} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{i\omega t} e^{-ik_0(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)}\left(\sin\theta_i\mathbf{e_1} - \cos\theta_i\mathbf{e_2}\right),$$

réfléchi :

$$\mathbf{H_r} = r^{\mathrm{TE}} E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{i\omega t} e^{-ik_0(-x\cos\theta_r + y\sin\theta_r)}\left(\sin\theta_r\mathbf{e_1} + \cos\theta_r\mathbf{e_2}\right),$$

et transmis :

$$\mathbf{H_t} = t^{\mathrm{TE}} E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{i\omega t} e^{-ik_0(x\sqrt{m_y m_z}\cos\theta_t + y\sqrt{m_x m_z}\sin\theta_t)}\left(\sqrt{\frac{m_z}{m_x}}\sin\theta_t\mathbf{e_1} - \sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t\mathbf{e_2}\right)$$

Par ailleurs, on impose les conditions de continuité suivantes (voir chapitre 2) :

- continuité de la composante tangentielle de $E$ à l'interface :
$$1 + r^{\mathrm{TE}} = t^{\mathrm{TE}} \tag{5.13}$$
- continuité de la composante tangentielle de $H$ à l'interface :
$$\cos\theta_i - r^{\mathrm{TE}}\cos\theta_i = t^{\mathrm{TE}}\sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t \tag{5.14}$$
- continuité de la phase :
$$\sin\theta_i = \sqrt{m_x m_z}\sin\theta_t. \tag{5.15}$$

Les relations (5.13) et (5.14) donnent le coefficient de réflexion $R^{\mathrm{TE}}$ :

$$r^{\mathrm{TE}} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t}. \tag{5.16}$$

Dans le cas TM$_z$, on obtient de la même manière :

$$r^{\mathrm{TM}} = \frac{\sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{m_z}{m_y}}\cos\theta_t}. \tag{5.17}$$

Les relations (5.15), (5.16) et (5.17) montrent donc que, sous les conditions $m_y = m_z$ et $m_x = m_z^{-1}$, on aurait $r^{\mathrm{TE}} = r^{\mathrm{TM}} = 0$. Nous allons montrer que ces conditions sont réalisables et qu'elles ne contredisent ni (H$_1$), ni (H$_2$). Tout d'abord, la condition $m_y = m_z$ est simple à réaliser : il suffit de prendre $\sigma_y = \sigma_z$ et $\nu_y = \nu_z$. La condition $m_x = m_z^{-1}$ s'écrit quant à elle :

$$\left(1 - i\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}\right)\left(1 - i\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_z^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}\right) = 1. \tag{5.18}$$

Nous cherchons maintenant à montrer l'existence d'un opérateur $[\nu]$ vérifiant (5.18). Cherchant un tel opérateur à coefficients réels, nous montrons tout d'abord la proposition suivante :

**Proposition 5.2.3** *Il n'existe pas d'opérateur $[\nu]$ à coefficients réels vérifiant (5.18).*

**Preuve**. Supposons qu'il existe un opérateur $[\nu]$ de $M_\Sigma$ solution de (5.18). En égalant les parties réelles et imaginaires dans (5.18), on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} + \dfrac{\nu_z^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} + \dfrac{\sigma_x\sigma_z}{\varepsilon_0^2\omega^2} = \dfrac{\nu_x^2\nu_z^2}{\varepsilon_0^4\omega^4}, \\[2ex] \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} + \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{\sigma_z\nu_x^2}{\varepsilon_0^3\omega^3} + \dfrac{\sigma_x\nu_z^2}{\varepsilon_0^3\omega^3}. \end{array}\right. \tag{5.19}$$

En posant :

$$s = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega}, \qquad p = \frac{\sigma_x\sigma_z}{\varepsilon_0^2\omega^2};$$

$$S = \frac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} + \frac{\nu_z^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}, \qquad P = \frac{\nu_x^2\nu_z^2}{\varepsilon_0^4\omega^4};$$

le système (5.19) s'écrit aussi :

$$\left\{\begin{array}{ll} P = S + p, & (5.20) \\[2ex] s = \dfrac{\sigma_x\nu_z^2}{\varepsilon_0^3\omega^3} + \dfrac{\sigma_z\nu_x^2}{\varepsilon_0^3\omega^3}. & (5.21) \end{array}\right.$$

La définition de $S$ et la relation (5.21) montrent que $X_1 := \dfrac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}$ et $X_2 := \dfrac{\nu_z^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 + X_2 = S, \\[2ex] \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega}X_1 + \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega}X_2 = s; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire, grâce à (5.20) :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = P - p = X_1 X_2 - p, & (5.22) \\ \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} X_1 + \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} X_2 = s. & (5.23) \end{cases}$$

La relation (5.23) donne l'expression de $X_2$ en fonction de $X_1$ :

$$X_2 = \frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma_x} s - \frac{\sigma_z}{\sigma_x} X_1; \tag{5.24}$$

ce qui montre, en injectant (5.24) dans (5.22), que $X_1$ est solution de l'équation du second degré :

$$X^2 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z} - \frac{\varepsilon_0\omega s}{\sigma_z} - 1\right) X + \frac{\varepsilon_0\omega s}{\sigma_z} + p\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = 0. \tag{5.25}$$

Comme $\varepsilon_0\omega s = \sigma_x + \sigma_y$, (5.25) se réduit à l'équation :

$$X^2 - 2X + 1 + \frac{\sigma_x}{\sigma_z} + \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} = 0, \tag{5.26}$$

qui n'a pas de racine réelle puisque son discriminant réduit vaut : $-\dfrac{\sigma_x}{\sigma_z} - \dfrac{\sigma_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} < 0$.
Par conséquent, $\nu_x^2$ (donc $\nu_x$) n'est pas réel. De la même manière, en déterminant l'équation du second degré satisfaite par $X_2$, on montre que $\nu_y$ n'est pas non plus réel. □

Nous établissons maintenant le résultat suivant :

**Lemme 5.2.4** *On suppose que $\sigma_y = \sigma_z$ et $\nu_y = \nu_z = \eta_y = \eta_z = 0$. Il existe des valeurs de $\nu_x$ et $\eta_x$ satisfaisant à la fois $m_x m_y = 1$ et $(H_2)$. Ces applications vérifient*

$$\nu_x^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} - i\frac{(\sigma_x + \sigma_y)\varepsilon_0\omega + \sigma_y^2 \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega}}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}, \tag{5.27}$$

$$\eta_x^2 = \frac{\tau_y^2}{1 + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}} - i\frac{(\tau_x + \tau_y)\mu_0\omega + \tau_y^2 \frac{\tau_x}{\mu_0\omega}}{1 + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}}. \tag{5.28}$$

**Preuve**. On cherche une valeur de $\nu_x$ vérifiant $m_x m_y = 1$, soit :

$$\left(1 - i\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}\right)\left(1 - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega}\right) = 1.$$

En écrivant $\nu_x^2 = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on se ramène à résoudre le système :

$$\begin{cases} -a - \sigma_x\sigma_y - b\dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega} = 0 \\ -\sigma_x - \sigma_y - \dfrac{b}{\varepsilon_0\omega} + a\dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0^2\omega^2} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$a = \frac{\sigma_y^2}{1+\frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{(\sigma_x+\sigma_y)\varepsilon_0\omega + \sigma_y^2\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega}}{1+\frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}.$$

On prend donc pour $\nu_x$ une racine carrée de $a+ib$ et, pour $\eta_x$, une racine carrée de :

$$\frac{\tau_y^2}{1+\frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}} - i\frac{(\tau_x+\tau_y)\mu_0\omega + \tau_y^2\frac{\tau_x}{\mu_0\omega}}{1+\frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}}.$$

L'hypothèse ($\mathrm{H}_1$) entraîne alors $\dfrac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2} = \dfrac{\eta_x^2}{\mu_0^2}$. Autrement dit, sous les hypothèses de ce lemme, la condition ($\mathrm{H}_2$) est une simple conséquence de la condition ($\mathrm{H}_1$). □

Désormais, nous faisons donc les hypothèses :

$$(\mathrm{H}_3) \qquad m_y = m_z,$$

$$(\mathrm{H}_4) \qquad m_x = m_z^{-1}.$$

Comme nous l'avons prouvé au lemme 5.2.4, ces hypothèses sont notamment réalisées en prenant $\sigma_y = \sigma_z$, $\nu_y = \nu_z = \eta_y = \eta_z = 0$ et $\nu_x$, $\eta_x$ définies par (5.27) et (5.28). Nous avons en outre établi le résultat suivant.

**Proposition 5.2.5** *Sous les hypothèses ($H_1$), ($H_2$), ($H_3$) et ($H_4$), $r^{TE} = r^{TM} = 0$.*

Il reste à préciser le comportement du champ dans la couche, c'est-à dire la forme de l'onde transmise. On a vu précédemment que, pour une onde se propageant dans le plan $xy$, on a (quel que soit le mode de propagation) :

$$\mathbf{E_t} = e^{i\omega t}e^{-ik_0(x\sqrt{m_y m_z}\cos\theta_t + y\sqrt{m_x m_z}\sin\theta_t)}\mathbf{A_0},$$

c'est-à-dire, sous les hypothèses ($\mathrm{H}_3$) et ($\mathrm{H}_4$) :

$$\mathbf{E_t} = e^{i\omega t}e^{-ik_0(x m_y\cos\theta_t + y\sin\theta_t)}\mathbf{A_0}.$$

Le nombre d'onde $k_0$ étant réel positif, la décroissance exponentielle de l'onde transmise est alors conditionnée par le terme $m_y$ et seule sa partie imaginaire importe. En fait, il est nécessaire d'avoir

$$\mathcal{I}m\,(m_y) < 0 \tag{5.29}$$

pour que le champ transmis décroîsse dans la direction de la PML. Maintenant, sous l'hypothèse ($\mathrm{H}_1$) et en supposant que les tenseurs $[\sigma]$, $[\tau]$, $[\nu]$ et $[\eta]$ sont définis par le lemme 5.2.4 (cas particulier des hypothèses ($\mathrm{H}_2$), ($\mathrm{H}_3$) et ($\mathrm{H}_4$)), on a :

$$m_y = 1 - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega}, \tag{5.30}$$

d'où :

$$\mathbf{E_t} = e^{-\lambda k_0 x\cos\theta_t}e^{i\omega t}e^{-ik_0(x\cos\theta_t + y\sin\theta_t)}\mathbf{A_0}$$

avec $\lambda = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega} > 0$ dans la couche $\{x > 0\}$ ; d'où la décroissance exponentielle de l'onde transmise.

### 5.2.3 Analyse du modèle à coefficients variables

Dans le cas où les coefficients des tenseurs sont variables, nous proposons d'exprimer les ondes se propageant dans la couche comme solutions d'un système différentiel d'ordre un. Dans des travaux plus anciens consacrés au système de Maxwell 2D, Abarbanel et Gottlieb [2] suivent une démarche similaire. Toutefois, ils n'exploitent pas directement les propriétés du système et le résolvent en passant par des équations différentielles du second ordre non standard.

#### 5.2.3.1 Analyse dans le cas d'une couche infinie

On s'intéresse de nouveau au problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$ en considérant une onde électromagnétique plane $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ de plan d'incidence $Oxy$ ($k_z = 0$). Comme précédemment, le problème se ramène à l'étude des deux cas de polarisation de l'onde, le cas $\mathrm{TE}_z$ et le cas $\mathrm{TM}_z$. Nous traitons seulement le cas $\mathrm{TE}_z$, la démonstration dans le cas $\mathrm{TM}_z$ étant analogue. Nous nous plaçons en outre dans le cadre du paragraphe précédent en supposant que les conditions $(\mathrm{H}_1)$, $(\mathrm{H}_2)$, $(\mathrm{H}_3)$ et $(\mathrm{H}_4)$ sont satisfaites. Comme le champ est supposé transverse électrique, on a :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix};$$

et, compte tenu des hypothèses, le système $(\widetilde{\mathcal{P}})$ s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t E_z - \partial_x H_y + \partial_y H_x + \sigma_z E_z = 0, & (5.31) \\ \mu_0 \partial_t H_x + \partial_y E_z + \tau_x H_x + \eta_x Q_x = 0, & (5.32) \\ \mu_0 \partial_t H_y - \partial_x E_z + \tau_y H_y = 0, & (5.33) \\ \mu_0 \partial_t Q_x - \eta_x H_x = 0. & (5.34) \end{cases}$$

On souhaite résoudre le problème précédent dans $\mathbb{R}^3$ tout entier et pour cela, on cherche des solutions du système (5.31)-(5.34) de la forme :

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = A_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_y}{\omega \mu_0} \\ -\frac{k_x}{\omega \mu_0} \end{bmatrix} \qquad \text{pour } x \leq 0, \tag{5.35}$$

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_x \\ H_y \\ Q_x \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - k_y y)} \begin{bmatrix} e_z \\ h_x \\ h_y \\ q_x \end{bmatrix} \qquad \text{pour } x > 0, \tag{5.36}$$

où $e_z$, $h_x$, $h_y$ et $q_x$ sont des applications qui dépendent uniquement de la variable $x$.
Tout d'abord, l'équation (5.34) donne $q_x$ en fonction de $h_x$ :

$$q_x = \frac{\eta_x}{i\omega\mu_0} h_x.$$

En injectant (5.36) dans le système (5.31)-(5.34), le problème revient donc à trouver $e_z$, $h_x$ et $h_y$ solutions de :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_0 m_z e_z = h_y' + ik_y h_x, & (5.37)\\ i\omega\mu_0 n_x h_x = ik_y e_z, & (5.38)\\ i\omega\mu_0 n_y h_y = e_z', & (5.39)\end{cases}$$

où $m_z$, $n_x$ et $n_y$ désignent les quantités introduites au paragraphe précédent et $(\cdot)' = \dfrac{d(\cdot)}{dx}$.
La relation (5.38) donne alors

$$h_x = \frac{k_y}{\omega\mu_0 n_x} e_z,$$

d'où, grâce à (5.37),

$$h_y' = \frac{i\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_x m_z - ik_y^2}{\omega\mu_0 n_x} e_z = \frac{ik_x^2 n_x m_z + ik_y^2 n_x m_y - ik_y^2}{\omega\mu_0 n_x} e_z$$

puisque $\omega^2\varepsilon_0\mu_0 = k_x^2 + k_y^2$.
Par conséquent, on doit résoudre le système différentiel :

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i\omega\mu_0 n_y \\ \\ \dfrac{ik_x^2 n_x m_z + ik_y^2 n_x m_y - ik_y^2}{\omega\mu_0 n_x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix}.$$

Afin de résoudre ce système, nous allons diagonaliser la matrice

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & i\omega\mu_0 n_y \\ \\ \dfrac{ik_x^2 n_x m_z + ik_y^2 n_x m_y - ik_y^2}{\omega\mu_0 n_x} & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique s'écrit :

$$\chi_{\mathcal{L}}(X) = X^2 + n_y\left(k_x^2 m_z + k_y^2 m_y - \frac{k_y^2}{n_x}\right), \tag{5.40}$$

donc $\mathcal{L}$ admet deux valeurs propres distinctes $\gamma$ et $-\gamma$. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à $\mathcal{D} = \mathrm{diag}(\gamma, -\gamma)$. Notons

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{i\omega\mu_0 n_y}{\gamma} \\ \\ \dfrac{\gamma}{i\omega\mu_0 n_y} & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres de $\mathcal{L}$. On a :

$$\mathcal{Q}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{i\omega\mu_0 n_y}{\gamma} \\ \\ -\dfrac{\gamma}{i\omega\mu_0 n_y} & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{Q} = \mathcal{D}. \tag{5.41}$$

Nous avons alors :

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix} = \mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix},$$

donc

$$\mathcal{Q}^{-1}\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix} = \mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Comme $\mathcal{Q}^{-1}$ dépend de la variable $x$, on ne peut pas récrire (5.42) sous la forme :

$$\frac{d}{dx}W = \mathcal{D}W, \tag{5.43}$$

où

$$W = \mathcal{Q}^{-1}\begin{bmatrix} e_z \\ \\ h_y \end{bmatrix}. \tag{5.44}$$

En revanche, sous les hypothèses ($H_1$), ($H_2$), ($H_3$) et ($H_4$) dégagées au paragraphe précédent nous avons :

$$n_y = m_y = m_z = m_x^{-1} = n_x^{-1} \ ;$$

donc la matrice $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & i\omega\mu_0 m_y \\ \\ ik_x^2 \frac{m_y}{\omega\mu_0} & 0 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $\pm\gamma$, avec $\gamma = im_y k_x$. Sous ces hypothèses, la matrice $\mathcal{Q}^{-1}$ ne dépend pas de $x$ puisque :

$$\mathcal{Q}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\omega}{k_x}\mu_0 \\ \\ -\dfrac{k_x}{\omega\mu_0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, nous disposons du système différentiel (5.43). On déduit qu'il existe des constantes $A$ et $B$ telles que :

$$W = \begin{bmatrix} Ae^{\int_0^x \gamma(s)\,ds} \\ \\ Be^{-\int_0^x \gamma(s)\,ds} \end{bmatrix},$$

et la relation (5.44) fournit les valeurs de $e_z$ et $h_y$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_z = Ae^{\int_0^x \gamma(s)\, ds} - \dfrac{\omega}{k_x}\mu_0 B e^{-\int_0^x \gamma(s)\, ds}, \\ \\ h_y = \frac{k_x}{\omega\mu_0} A e^{\int_0^x \gamma(s)\, ds} + B e^{-\int_0^x \gamma(s)\, ds}. \end{array} \right. \tag{5.45}$$

Pour déterminer les constantes $A$ et $B$, on utilise la continuité de $E_z$ et $H_y$ à travers l'interface $\{x = 0\}$ (voir le chapitre 2, partie 2.5), c'est-à-dire les relations :

$$e_z(0) = A_0 \qquad \text{et} \qquad h_y(0) = -\frac{k_x}{\omega\mu_0} A_0.$$

Il vient :

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{k_x}{\omega\mu_0} A_0.$$

Enfin, comme précédemment, si $[\nu]$ et $[\eta]$ sont les tenseurs définis au lemme 5.2.4, on a $m_y = 1 - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega}$ ; donc $\gamma = ik_x + \dfrac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_0} k_x$, d'où :

$$\begin{bmatrix} E_z \\ \\ H_x \\ \\ H_y \\ \\ Q_x \end{bmatrix} = A_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} e^{-\frac{k_x}{\omega\epsilon_0}\int_0^x \sigma_y(s)\, ds} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ m_y \frac{k_y}{\omega\mu_0} \\ \\ -\frac{k_x}{\omega\mu_0} \\ \\ -i\eta_x m_y \frac{k_y}{\omega^2\mu_0^2} \end{bmatrix}.$$

On vient donc de montrer de nouveau que le modèle $(\widetilde{\mathcal{P}})$ est un modèle PML.
Notons qu'en imposant $\sigma_y(0) = 0$, on assure aussi la continuité de $H_x$ à l'interface : il n'y a alors pas de passage brutal de l'espace libre à la couche, ce que l'on ne saurait réaliser en choisissant $\sigma_y$ constante. La continuité de $Q_x$ nécessiterait, quant à elle, d'imposer en outre $\sigma_x(0) = 0$.

**Remarque 5.2.6** *La technique que nous venons d'utiliser permet de démontrer, sans avoir recours à des équations différentielles du second ordre, que les modèles présentés dans [2] et [113] sont des modèles PML.*

#### 5.2.3.2 Cas d'une couche d'épaisseur finie

En pratique, on ne se place pas dans le cadre précédent mais on utilise une couche d'épaisseur finie $\{0 \leq x \leq a\}$. On doit alors imposer des conditions à la fin de la couche. On reprend donc le travail mené au paragraphe prédédent en imposant les conditions usuelles (conductivité parfaite) : continuité de $E$ à l'interface ainsi que $H_y(a) = 0$, *i.e.* $e_z(0) = A_0$ et $h_y(a) = 0$. La résolution du système (5.45) avec ces nouvelles contraintes donne :

$$A = \frac{A_0 e^{-2J_a}}{1 + e^{-2J_a}} \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{k_x}{\omega\mu_0}\frac{A_0}{1 + e^{-2J_a}},$$

avec $J_a = \displaystyle\int_0^a \gamma(s)\,ds = ik_x a + \frac{k_x}{\varepsilon_0\omega}\int_0^a \sigma_y(s)\,ds.$
En prenant $\int_0^a \sigma_y(s)\,ds$ suffisamment grand on peut donc rendre $A$ aussi proche de 0 (et $B$ aussi proche de $-\frac{k_x}{\omega\mu_0}A_0$) que l'on veut et ainsi tendre vers le cas de la couche infinie étudiée précédemment. Comme il est souligné dans [113], tout revient à trouver un équilibre convenable entre la fonction $\sigma_y$ et l'épaisseur $a$ de la couche.
Pour terminer cette partie, nous précisons la valeur des champs dans la couche :

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{A_0}{1+e^{-2J_a}}\left(1+e^{-2ik_x(x-a)}e^{-2\frac{k_x}{\omega\mu_0}\int_x^a \sigma_y(s)\,ds}\right)e^{i(\omega t-k_x x-k_y y)}e^{-\frac{k_x}{\omega\varepsilon_0}\int_0^x \sigma_y(s)\,ds},\\
H_x &= \frac{k_y m_y}{\omega\mu_0}E_z\\
H_y &= \frac{k_x}{\omega\mu_0}\,\frac{A_0}{1+e^{-2J_a}}\left(e^{-2ik_x(x-a)}e^{-2\frac{k_x}{\omega\mu_0}\int_x^a \sigma_y(s)\,ds}-1\right)e^{i(\omega t-k_x x-k_y y)}e^{-\frac{k_x}{\omega\varepsilon_0}\int_0^x \sigma_y(s)\,ds},\\
Q_x &= -i\eta_x\frac{k_y m_y}{\omega^2\mu_0^2}E_z.
\end{aligned}
$$

## 5.3 Formulation du modèle PML

Le lemme 5.2.4 montre qu'il existe au moins un couple de tenseurs $[\nu]$ et $[\eta]$ pour lequel les solutions ondes planes se propageant dans $\{x<0\}$ sont parfaitement transmises dans $\{x>0\}$ avec une atténuation exponentielle dans le milieu absorbant. Cependant, on remarque que les tenseurs $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ sont définis par des fonctions dépendant de $x$ et de $\omega$. La formulation du système PML est donc plus complexe qu'on ne le pensait. En effet, les matrices $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ doivent plutôt être vues comme les symboles d'opérateurs pseudo-différentiels par rapport au temps, à coefficients variables ne dépendant que de $x$. Ainsi, une formulation plus correcte du modèle PML est la suivante. Le quadruplet $(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q})$ vérifie le système :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}-\mathrm{rot}\mathbf{H}+[\sigma]\mathbf{E}+[A]\mathbf{P}=\mathbf{0},\\
&\mu_0\partial_t\mathbf{H}+\mathrm{rot}\mathbf{E}+[\tau]\mathbf{H}+[B]\mathbf{Q}=\mathbf{0},\\
&\varepsilon_0\partial_t\mathbf{P}-[A]\mathbf{E}=\mathbf{0},\\
&\mu_0\partial_t\mathbf{Q}-[B]\mathbf{H}=\mathbf{0};
\end{aligned}
\right.
\tag{5.46}
$$

où $[A]$ et $[B]$ sont des tenseurs diagonaux dont les coefficients sont des opérateurs pseudo-différentiels en temps et à coefficients variables ne dépendant que de $x$. Les tenseurs $[\nu]$ et $[\eta]$ de l'analyse précédente peuvent alors être vus comme les symboles respectifs des opérateurs $[A]$ et $[B]$ à condition que l'on ait la propriété suivante : pour tout champ d'ondes planes $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi_0}e^{i(\omega t-\mathbf{k}.\boldsymbol{x})}$,

$$[A]\boldsymbol{\psi}=[\nu]\boldsymbol{\psi} \qquad \text{et} \qquad [B]\boldsymbol{\psi}=[\eta]\boldsymbol{\psi}; \tag{5.47}$$

où $[\nu]$ et $[\eta]$ coïncident avec les symboles de $[A]$ et $[B]$. La propriété (5.47) est immédiate si $[A]$ et $[B]$ sont des tenseurs d'opérateurs différentiels. Elle est aussi vérifiée par des opérateurs pseudo-différentiels classiques si on adopte la formule de représentation donnée au chapitre 1. Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel classique $T$ admet la représentation intégrale :

$$T\phi(\mathbf{y})=\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}t(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi},$$

où $\boldsymbol{\xi}$ désigne la variable duale de $\mathbf{y}$ par transformée de Fourier. La fonction $t := t(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\xi})$ représente le symbole de $T$. La vérification de (5.47) est une conséquence immédiate de la propriété :

$$t(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = e^{-i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} T(e^{i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}).$$

Désormais, les opérateurs $[A]$ et $[B]$ devront être vus comme des opérateurs pseudo-différentiels admettant la représentation :

$$\begin{aligned}
[A]u(t,x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} a(\omega, x) e^{i\omega t} \mathcal{F}_t\, u(\omega, x)\, d\omega, \\
[B]u(t,x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} b(\omega, x) e^{i\omega t} \mathcal{F}_t\, u(\omega, x)\, d\omega;
\end{aligned}$$

avec $a(x, \omega) = [\nu]$ et $b(x, \omega) = [\eta]$. La notation $\mathcal{F}_t$ désigne la transformée de Fourier partielle en temps. On peut remarquer que les symboles de $[A]$ et $[B]$ ne dépendent que de $x$ et de $\omega$. Cette propriété est vérifiée par toute solution de l'équation (5.18). Les opérateurs $[A]$ et $[B]$ définis par le lemme 5.2.4 sont des opérateurs pseudo-différentiels de $OPS^{1/2}(\mathbb{R}_t)$, c'est-à-dire des opérateurs pseudo-différentiels en temps d'ordre $1/2$ dont les coefficients sont réguliers et s'expriment en fonction des tenseurs $[\sigma]$ et $[\tau]$ respectivement. Le lemme 5.2.4 ne définit pas directement les symboles de $[A]$ et $[B]$. Cependant, il les détermine de façon complète car les symboles de $[A]$ et $[B]$ ne dépendent que de $x$ et $\omega$. La règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels s'applique donc très simplement ici et on a :

$$s([A])^2 = s([A]^2), \qquad s([B])^2 = s([B]^2);$$

où $s([A])$ et $s([B])$ désignent les symboles respectifs de $[A]$ et $[B]$. Dans le cas général, $s([A])^2$ ne définit que le symbole principal de $[A]^2$. Le lemme 5.2.4 donne un exemple d'opérateurs $[A]$ et $[B]$ *via* leur symbole. Notons que $\nu_x^2$ et $\eta_x^2$ sont des fractions rationnelles en $\omega$ dont le numérateur est de degré 1 et le dénominateur est de degré 0. D'après [120] ou [126], $[A]^2$ et $[B]^2$ sont des opérateurs de $OPS^1(\mathbb{R}_t)$ et, par conséquent, $[A]$ et $[B]$ sont des opérateurs de $OPS^{1/2}(\mathbb{R}_t)$.
La formulation (5.46) fait donc intervenir des opérateurs pseudo-différentiels. Ces opérateurs ne sont pas forcément très simples à utiliser, notamment d'un point de vue numérique. Toutefois, le couplage du système de Maxwell avec des opérateurs pseudo-différentiels peut être évité. En effet, $[A]$ et $[B]$ interviennent à la fois dans la construction des inconnues auxiliaires $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$, et dans la perturbation des équations de Maxwell. Cependant, on pourrait procéder autrement lorsque $\nu_x^2$ et $\nu_z^2$ (et donc $\nu_y^2$) sont des fractions rationnelles en $\omega$. On peut poser :

$$[A]^2 = [A_1][A_2],$$

où $[A_1]$ est un opérateur différentiel dont le symbole est donné par le numérateur des coefficients de $[\nu^2]$ et $[A_2]$ est l'inverse d'un opérateur différentiel dont le symbole est donné par le dénominateur des coefficients de $[\nu^2]$. Dans ce cas, une autre formulation équivalente de (5.46) est donnée par le système :

$$\begin{cases}
\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [A_1]\mathbf{P} = \mathbf{0}, \\
\mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [B_1]\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\
\varepsilon_0 \partial_t [A_2]^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\
\mu_0 \partial_t [B_2]^{-1}\mathbf{Q} - \mathbf{H} = \mathbf{0};
\end{cases}$$

qui ne fait intervenir que des opérateurs différentiels, ce qui est plus agréable. Cependant, cette formulation augmente le degré des équations différentielles vérifiées par les inconnues auxiliaires. On peut évidemment choisir d'autres façons de décomposer $[A]^2$ et proposer d'autres formulations du modèle PML. Ces formulations sont équivalentes car elles sont associées à la même écriture symbolique, comme le montre l'analyse par ondes planes. Cette analyse (menée à la section 5.2) permet d'ailleurs d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 5.3.1** *Soient $[\sigma]$ et $[\tau]$ deux tenseurs de $M_{\Sigma_+}$ vérifiant la condition de compatibilité $(H_1)$ et tels que $\sigma_y = \sigma_z$. Si $[A]$ et $[B]$ désignent les opérateurs pseudo-différentiels dont les symboles $[\nu]$ et $[\eta]$ sont définis au lemme 5.2.4, alors :*
*1) les hypothèses $(H_2)$, $(H_3)$ et $(H_4)$ sont satisfaites,*
*2) le modèle $(\widetilde{\mathcal{P}})$ est un modèle PML.*

## 5.4 Remarques sur le modèle PML construit

### 5.4.1 Comparaison avec un modèle existant

L'analyse par ondes planes du modèle PML présenté dans [115] (voir aussi [135]) conduit à l'étude du système :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_0\widetilde{\mathcal{M}}\mathbf{E} = \mathrm{rot}\mathbf{H}, \\ \\ i\omega\mu_0\widetilde{\mathcal{M}}\mathbf{H} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}, \end{cases}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathrm{diag}\,(\widetilde{m_x}, \widetilde{m_y}, \widetilde{m_z})$ est une matrice dépendant de $\omega$ et des coefficients d'amortissement définis par le tenseur $[\sigma]$. Dans [115] et [135], on montre que l'on obtient un modèle PML (dans la direction des $x$) si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\widetilde{m_y} = \widetilde{m_z}, \qquad \widetilde{m_x}\widetilde{m_z} = 1, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}m\,(\widetilde{m_y}) < 0.$$

Autrement dit, l'analyse par ondes planes que nous avons menée conduit aux mêmes conditions PML que dans ces travaux (hypothèses de la proposition 5.2.5 et condition (5.29)).

### 5.4.2 Recherche d'un autre tenseur $[\boldsymbol{\nu}]$ convenable

Il est possible de construire un autre tenseur $[\nu]$ vérifiant (5.18) et tel que l'on obtienne un modèle PML. Par exemple, en prenant $\nu_x = \nu_z$, l'équation (5.18) s'écrit :

$$X^2 + \varepsilon_0\omega\,[i(\sigma_x + \sigma_z) - 2\varepsilon_0\omega]\,X - \varepsilon_0^2\omega^2\,[i\varepsilon_0\omega(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_x\sigma_z]\,,$$

avec $X = \nu_x^2$. Le discriminant de cette équation est donné par :

$$\varepsilon_0^2\omega^2\left[4\varepsilon_0^2\omega^2 - (\sigma_x - \sigma_z)^2\right].$$

Par conséquent, on obtient :

$$\nu_x^2 = \varepsilon_0^2\omega^2 - i\varepsilon_0\omega\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{\varepsilon_0\omega}{2}\sqrt{4\varepsilon_0^2\omega^2 - (\sigma_x - \sigma_z)^2}, \tag{5.48}$$

pour $4\varepsilon_0^2\omega^2 \geq (\sigma_x - \sigma_z)^2$. Afin de réaliser l'hypothèse $(H_1)$, nous imposons maintenant :

$$\sigma_y = \sigma_z, \tag{5.49}$$

et

$$\nu_y = \nu_z \quad (\text{donc } \nu_x = \nu_y = \nu_z). \tag{5.50}$$

En prenant $\nu_x^2$ défini par (5.48), on a alors $m_y m_z = 1$ et $r^{TE} = r^{TM} = 0$ puisque les hypothèses de la proposition 5.2.5 sont vérifiées. On définit alors $[\eta]$ à l'aide de $(H_2)$ et du tenseur $[\nu]$ considéré ci-dessus. Enfin, d'après (5.29), la décroissance exponentielle de l'onde dans la couche est assurée si :

$$\mathcal{I}m(m_y) < 0.$$

Mais, d'après (5.48), (5.49) et (5.50), on a :

$$\begin{aligned} m_y &= 1 - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} = 1 - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} = 1 - i\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\nu_x^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} \\ &= 1 - i\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0\omega} - 1 + i\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2\varepsilon_0\omega} \pm \frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sqrt{4\varepsilon_0^2\omega^2 - (\sigma_x - \sigma_z)^2} \\ &= \pm\frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sqrt{4\varepsilon_0^2\omega^2 - (\sigma_x - \sigma_z)^2} - i\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\varepsilon_0\omega}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on choisit $\sigma_z > \sigma_x$, la partie imaginaire de $m_y$ est strictement négative et le tenseur $[\nu]$ que l'on vient de construire convient. Nous avons donc obtenu le résultat suivant, analogue au théorème 5.3.1 mais pour ces nouveaux tenseurs $[\nu]$ et $[\eta]$ construits.

**Théorème 5.4.1** *Soient $[\sigma]$ et $[\tau]$ deux tenseurs de $M_{\Sigma_+}$ vérifiant la condition de compatibilité $(H_1)$ et tels que $\sigma_y = \sigma_z$ et $\sigma_z > \sigma_x$. Si $[A]$ et $[B]$ désignent les opérateurs pseudo-différentiels dont les symboles $[\nu]$ et $[\eta]$ sont par (5.48), (5.50) et $(H_2)$, alors :*
*1) les hypothèses $(H_3)$ et $(H_4)$ sont satisfaites,*
*2) le modèle $(\widetilde{\mathcal{P}})$ est un modèle PML.*

### 5.4.3 Variantes

Dans la suite, nous allons étudier plus particulièrement le modèle nous avons présenté au début de ce chapitre. Après avoir étudié ses propriétés mathématiques au paragraphe 5.5, nous verrons au chapitre consacré aux simulations numériques (chapitre 6) qu'il est intéressant car on peut éliminer les inconnues auxiliaires, ce qui améliore les performances de la méthode en terme de coût numérique. On peut néanmoins construire d'autres modèles PML en partant d'un modèle du type $(\widetilde{\mathcal{P}})$.

Nous présentons ici deux autres modèles PML dont la méthode de construction est guidée par le profil de modèles existants : le modèle de Bérenger [18] et le modèle étudié dans [114] (voir aussi [91]). Nous avons vu que, dans le domaine fréquentiel, le modèle $(\widetilde{\mathcal{P}})$ s'écrit, après élimination des inconnues $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ :

$$i\omega\varepsilon_0\mathcal{M}\mathbf{E} = \mathrm{rot}\mathbf{H}, \qquad i\omega\mu_0\mathcal{M}\mathbf{H} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}.$$

Dans les modèles [18] et [114], la matrice $\mathcal{M}$ s'écrit

$$\mathcal{M} = [1] + \frac{[\sigma]}{i\omega\varepsilon_0} \tag{5.51}$$

pour le premier, et

$$\mathcal{M} = [\kappa] + \frac{[\sigma]}{i\omega\varepsilon_0} \tag{5.52}$$

pour le second, avec :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [\kappa] = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix}.$$

L'introduction d'un tenseur $[\kappa]$ identiquement égal à $[1]$ dans le milieu réel et à coefficients supérieurs ou égaux à 1 dans le milieu PML est motivé dans [114] par la nécessité d'atténuer les ondes évanescentes dans la PML, ce qui n'est pas le cas du modèle [18].
Nous allons remplacer $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ par des tenseurs $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ toujours diagonaux et tels que l'on retrouve (5.51) ou (5.52). On se place de nouveau dans le cas où la condition de compatibilité $(\mathrm{H}_1)$ est satisfaite. Afin d'obtenir une matrice $\mathcal{M}$ du type (5.51) ou (5.52), on construit $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ de sorte que les tenseurs $[\nu]$ et $[\eta]$ sont éliminés dans le modèle. Cela revient à imposer

$$i\omega[\varepsilon] + \frac{[\nu]^2}{i\omega}[\varepsilon]^{-1} = i\omega\varepsilon_0[1] \qquad \text{(c'est-à-dire} \quad [\varepsilon] - \frac{[\nu]^2}{\omega^2}[\varepsilon]^{-1} = \varepsilon_0[1])$$

pour retrouver (5.51), et

$$i\omega[\varepsilon] + \frac{[\nu]^2}{i\omega}[\varepsilon]^{-1} = i\omega\varepsilon_0[\kappa] \qquad \text{(c'est-à-dire} \quad [\varepsilon] - \frac{[\nu]^2}{\omega^2}[\varepsilon]^{-1} = \varepsilon_0[\kappa])$$

pour retrouver (5.52). La construction de $[\mu]$ s'établit alors grâce à la condition de compatibilité. Évidemment, la construction de $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ ne montre pas que le modèle est un modèle PML. Il reste à faire l'analyse par ondes planes.
Nous présentons maintenant deux modèles pour lesquels cette analyse assure qu'ils sont parfaitement adpatés. Désormais, nous faisons l'hypothèse :

$$\nu_x = \eta_x = 0. \tag{5.53}$$

Nous cherchons alors des valeurs positives de $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$, $\mu_y$ et $\mu_z$ qui vérifient :

$$\forall \alpha = y, z \qquad \begin{cases} i\omega\varepsilon_\alpha + \dfrac{\nu_\alpha^2}{i\omega\varepsilon_\alpha} = i\omega\kappa_\alpha\varepsilon_0, \\[2ex] i\omega\mu_\alpha + \dfrac{\eta_\alpha^2}{i\omega\mu_\alpha} = i\omega\kappa_\alpha\mu_0; \end{cases}$$

avec :

(*i*) $\kappa_\alpha = 1$ dans $\mathbb{R}^3$ si on cherche à retrouver (5.51) et $\kappa_\alpha = 1$ dans $\{x < 0\}$ ;

(*ii*) $\kappa_\alpha \geq 1$ dans $\{x \geq 0\}$ si on veut retrouver (5.52).

Nous cherchons donc des valeurs positives de $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$, $\mu_y$ et $\mu_z$ telles que :

$$\forall \alpha = y, z \qquad \begin{cases} \varepsilon_\alpha^2 - \kappa_\alpha\varepsilon_0\varepsilon_\alpha - \dfrac{\nu_\alpha^2}{\omega^2} = 0, \\[2ex] \mu_\alpha^2 - \kappa_\alpha\varepsilon_0\mu_\alpha - \dfrac{\nu_\alpha^2}{\omega^2} = 0. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\forall \alpha = y, z, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\kappa_\alpha \varepsilon_0 + \sqrt{\kappa_\alpha^2 \varepsilon_0^2 + 4\frac{\nu_\alpha^2}{\omega^2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu_\alpha = \frac{\kappa_\alpha \mu_0 + \sqrt{\kappa_\alpha^2 \mu_0^2 + 4\frac{\eta_\alpha^2}{\omega^2}}}{2}. \tag{5.54}$$

Ensuite, on détermine $\varepsilon_x$ pour que le modèle soit un modèle PML. Compte tenu de (5.53) et (5.54), la matrice $\mathcal{M}$ s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0} - i\dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \omega} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y - i\dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0 \omega} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z - i\dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0 \omega} \end{bmatrix}.$$

On applique le même raisonnement qu'au paragraphe 5.2 : l'onde incidente est parfaitement transmise si les hypothèses ($\mathrm{H}_3$) et ($\mathrm{H}_4$) sont satisfaites. En choisissant :

$$\sigma_y = \sigma_z \qquad \text{et} \qquad \kappa_y = \kappa_z, \tag{5.55}$$

on assure la condition ($\mathrm{H}_3$). Afin de réaliser la condition ($\mathrm{H}_4$), on cherche $\varepsilon_x$ sous la forme $\varepsilon_x = \kappa_x \varepsilon_0 + \delta$, avec $\delta \in \mathbb{C}$. La valeur de $\mu_x$ sera alors donnée par la condition de compatibilité $\mu_0 \varepsilon_x = \varepsilon_0 \mu_x$. La condition ($\mathrm{H}_4$) s'écrit :

$$\left(\kappa_x + \frac{\delta}{\varepsilon_0} - i\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \omega}\right)\left(\kappa_y - i\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0 \omega}\right) = 1.$$

En écrivant $\delta = a + ib$, il vient :

$$a = \frac{\frac{\sigma_x \sigma_y}{\varepsilon_0 \omega^2}(1-\kappa_y) + \varepsilon_0(1-\kappa_x\kappa_y) - \frac{\kappa_x \sigma_y^2}{\varepsilon_0 \omega^2}}{\kappa_y + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\kappa_y^2 \frac{\sigma_x}{\omega} + \frac{\sigma_x \sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^3} + \frac{\sigma_y}{\omega}}{\kappa_y + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}}.$$

On en déduit donc que :

$$\varepsilon_x = \kappa_x \varepsilon_0 + \frac{\frac{\sigma_x \sigma_y}{\varepsilon_0 \omega^2}(1-\kappa_y) + \varepsilon_0(1-\kappa_x\kappa_y) - \frac{\kappa_x \sigma_y^2}{\varepsilon_0 \omega^2}}{\kappa_y + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + i\frac{\kappa_y^2 \frac{\sigma_x}{\omega} + \frac{\sigma_x \sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^3} + \frac{\sigma_y}{\omega}}{\kappa_y + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}}, \tag{5.56}$$

$$\mu_x = \kappa_x \mu_0 + \frac{\frac{\tau_x \tau_y}{\mu_0 \omega^2}(1-\kappa_y) + \mu_0(1-\kappa_x\kappa_y) - \frac{\kappa_x \tau_y^2}{\mu_0 \omega^2}}{\kappa_y + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2 \omega^2}} + i\frac{\kappa_y^2 \frac{\tau_x}{\omega} + \frac{\tau_x \tau_y^2}{\mu_0^2 \omega^3} + \frac{\tau_y}{\omega}}{\kappa_y + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2 \omega^2}}. \tag{5.57}$$

Enfin, comme

$$m_y = \kappa_y - i\frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0},$$

le raisonnement mené au paragraphe 5.2 montre que l'onde décroît exponentiellement dans la couche puisque :

$$\mathbf{E_t} = e^{-\lambda k_0 x \cos\theta_t} e^{i\omega t} e^{-ik_0(x\kappa_y \cos\theta_t + y\sin\theta_t)} \mathbf{A_0},$$

avec $\lambda = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0 \omega} > 0$ dans la couche $\{x > 0\}$.

Nous venons donc d'établir le résultat suivant.

**Proposition 5.4.2** *On suppose que $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ sont définis par (5.54), (5.56) et (5.57) et que les hypothèses ($H_1$), (5.53) et (5.55) sont satisfaites. Alors, le système $(\widetilde{\mathcal{P}})$, modifié en changeant $\varepsilon_0$ en $[\varepsilon]$ et $\mu_0$ en $[\mu]$, est un modèle PML.*

## 5.5 Propriétés mathématiques du modèle PML

Nous avons vu dans la partie 5.3 qu'à partir du modèle fréquentiel (5.7), on peut donner plusieurs formulations du modèle PML qui sont toutes équivalentes. Dans cette partie, nous choisissons une formulation et nous établissons un résultat d'existence et unicité.

### 5.5.1 Introduction

Nous fixons $T > 0$ et nous considérons le problème :

$$(\widetilde{\mathcal{P}_1}) \begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + \mathbf{P} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad (5.58) \\ \partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + \mathbf{Q} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad (5.59) \\ \partial_t \mathbf{P} = [\Lambda]\mathbf{E} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad (5.60) \\ \partial_t \mathbf{Q} = [\Gamma]\mathbf{H} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \quad (5.61) \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{E}_0(\boldsymbol{x}), \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{H}_0(\boldsymbol{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Les tenseurs $[\sigma]$ et $[\tau]$ sont des éléments de $M_W$, espace des opérateurs diagonaux à coefficients dans $W$, avec

$$W = \{w \in L^\infty(\mathbb{R}),\ \forall x < 0,\ w(x) = 0\}.$$

Les notations associées à ces tenseurs sont les mêmes que celles introduites au chapitre 3. Contrairement à ce qui a été fait dans ce chapitre, nous ne faisons pas ici d'hypothèse de signe sur $[\sigma]$ et $[\tau]$. Par ailleurs, nous notons désormais, pour tout $s > 0$, $\mathbb{X}_s$ l'espace défini par :

$$\mathbb{X}_s = C^0\left([0,s]; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)\right);$$

espace de Banach pour la norme du sup $||\cdot||_{\mathbb{X}_s}$ :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}_s, \quad ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s} = \sup_{0 \le w \le s} ||\mathbf{u}(\cdot, w)||_0.$$

Les opérateurs $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ sont des opérateurs pseudo-différentiels en temps dont les symboles respectifs sont $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$. Les tenseurs $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ ont été définis dans la partie 5.2. Ils sont diagonaux et chacun de leurs coefficients est une fonction de $\omega$ et de $x$.
On note $S^1_{1,0}(x)$ la classe des symboles tels que :

$$\forall s(\omega, x) \in S^1_{1,0}(x), \quad |\partial^\alpha_\omega\, s(\omega, x)| \le C_\alpha |\omega|^{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Cette classe de symboles a été définie dans [120]. Dans cette partie, nous allons supposer que $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ sont à coefficients dans $S^1_{1,0}(x)$. Ainsi, les opérateurs $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ sont des opérateurs de $OPS^1$ en temps, à coefficients dans $W$.

### 5.5.2 Existence et unicité de la solution PML

Le caractère pseudo-différentiel en temps de $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ ne permet pas d'appliquer directement le théorème de Hille-Yosida, comme cela a été fait au chapitre 3. C'est pour cette raison que nous allons procéder différemment pour prouver que le problème $(\widetilde{\mathcal{P}_1})$ admet une unique solution. Désormais, nous supposons que les opérateurs pseudo-différentiels $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ vérifient les hypothèses suivantes :

$$[\Lambda] = [\lambda]\partial_t + [\Lambda_0], \qquad [\Gamma] = [\gamma]\partial_t + [\Gamma_0]; \tag{5.62}$$

où $[\lambda]$, $[\gamma]$, $[\Lambda_0]$ et $[\Gamma_0]$ sont tels que :

$$(i)\ [\lambda],\ [\gamma] \in M_W \tag{5.63}$$

$$(ii)\ [\Lambda_0],\ [\Gamma_0] : C^0\left([0,T];\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)\right) \longrightarrow C^0\left(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)\right) \tag{5.64}$$

$(iii)$ il existe une constante $C(T)$ dépendant uniquement de $T$ telle que :

$$\Big|\Big|\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{u}(.,\xi)\,d\xi\Big|\Big|_0 \leq C(T)||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s} \quad \text{et} \quad \Big|\Big|\int_0^t [\Gamma_0]\mathbf{u}(.,\xi)\,d\xi\Big|\Big|_0 \leq C(T)||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}, \tag{5.65}$$

pour tout $s$ dans $[0,T]$, tout $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{X}_s$ et tout $t$ dans $[0,s]$.
Nous établissons alors le résultat suivant.

**Théorème 5.5.1** *Soient $\mathbf{E_0},\mathbf{H_0}$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ ; $[\sigma],[\tau]$ dans $M_W$ ; $[\Lambda]$, $[\Gamma]$ deux opérateurs pseudo-différentiels vérifiant (5.62), (5.63), (5.64) et (5.65). Alors, le problème $(\widetilde{\mathcal{P}_1})$ admet une unique solution*

$$(\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{Q}) \quad \textit{dans} \quad \mathbb{X}_T^4 = C^0\left([0,T],\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)^4.$$

*De plus, il existe une constante $C$ dépendant uniquement de $t$ telle que :*

$$\forall t > 0, \qquad ||\mathbf{E}(.,t),\mathbf{H}(.,t)||_0 \leq ||\mathbf{E_0},\mathbf{H_0}||_0\, e^{Ct}. \tag{5.66}$$

**Preuve**. 1) *Existence.* Sous l'hypothèse (5.62), on obtient, en intégrant les équations (5.60) et (5.61) entre 0 et $t$ :

$$\mathbf{P}(.,t) = [\lambda]\mathbf{E}(.,t) + \int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,s)\,ds - [\lambda]\mathbf{E_0} \tag{5.67}$$

$$\mathbf{Q}(.,t) = [\gamma]\mathbf{H}(.,t) + \int_0^t [\Gamma_0]\mathbf{H}(.,s)\,ds - [\gamma]\mathbf{H_0}. \tag{5.68}$$

Le couple $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ appartient bien à $\mathbb{X}_T \times \mathbb{X}_T$ d'après l'hypothèse (5.64). On injecte alors les relations (5.67) et (5.68) dans (5.58) et (5.59), ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} + [\sigma]\mathbf{E} + [\lambda]\mathbf{E}(.,t) + \displaystyle\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,s)\,ds - [\lambda]\mathbf{E_0} = 0, \\ \\ \partial_t\mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\tau]\mathbf{H} + [\gamma]\mathbf{H}(.,t) + \displaystyle\int_0^t [\Gamma_0]\mathbf{H}(.,s)\,ds - [\gamma]\mathbf{H_0} = 0; \end{array}\right. \tag{5.69}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \\ \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \\ \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \\ \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

où $A$ est l'opérateur maximal monotone :

$$A : D(A) = V \times V \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3),$$

défini par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{rot} \\ -\mathrm{rot} & 0 \end{bmatrix};$$

et $B$ est l'opérateur défini par :

$$B \begin{bmatrix} \mathbf{E}(t) \\ \\ \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\lambda + \sigma]\mathbf{E} - \displaystyle\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,s)\,ds + [\lambda]\mathbf{E_0} \\ \\ -[\gamma + \tau]\mathbf{H} - \displaystyle\int_0^t [\Gamma_0]\mathbf{H}(.,s)\,ds + [\gamma]\mathbf{H_0} \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant utiliser l'estimation suivante :

$$\exists C_1(T) > 0, \quad \forall s \in [0,T], \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_s, \quad ||B\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s} \leq C_1(T)||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}. \tag{5.71}$$

Commençons par démontrer ce résultat. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons, pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ dans $\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_s$ :

$$\forall w \in [0,s], \quad ||B\mathbf{u}(.,w)||_0^2 \leq 2\Bigg( ||[\lambda + \sigma]\mathbf{E}(.,w)||_0^2 + ||[\lambda]\mathbf{E_0}||_0^2 + \left|\left| \int_0^w [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,\xi)\,d\xi \right|\right|_0^2$$
$$+ ||[\gamma + \tau]\mathbf{H}(.,w)||_0^2 + ||[\gamma]\mathbf{H_0}||_0^2 + \left|\left| \int_0^w [\Gamma_0]\mathbf{H}(.,\xi)\,d\xi \right|\right|_0^2 \Bigg).$$

Comme, pour $0 \leq w \leq s$, $||\mathbf{E}(.,w)||_0 \leq ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s} \leq ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}$ et $||\mathbf{H}(.,w)||_0 \leq ||\mathbf{H}||_{\mathbb{X}_s} \leq ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}$, l'inégalité précédente entraîne :

$$\forall w \in [0,s], \quad ||B\mathbf{u}(.,w)||_0^2 \leq 2\left(|\lambda + \sigma|^2 + |\lambda|^2 + |\gamma + \tau|^2 + |\gamma|^2\right) ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}^2$$
$$+2\left( \left|\left| \int_0^w [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,\xi)\,d\xi \right|\right|_0^2 + \left|\left| \int_0^w [\Gamma_0]\mathbf{H}(.,\xi)\,d\xi \right|\right|_0^2 \right).$$

L'hypothèse (5.65) montre alors que :

$$||B\mathbf{u}(.,w)||_0^2 \leq 2\left(|\lambda + \sigma|^2 + |\lambda|^2 + |\gamma + \tau|^2 + |\gamma|^2 + C(T)^2\right) ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}^2,$$

d'où :

$$||B\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}^2 \leq 2\left(|\lambda - \sigma|^2 + |\lambda|^2 + |\gamma - \tau|^2 + |\gamma|^2 + C(T)^2\right) ||\mathbf{u}||_{\mathbb{X}_s}^2,$$

ce qui démontre l'inégalité (5.71). Maintenant, nous définissons la suite $(\mathbf{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{X}_T$ par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^0(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} \mathbf{E_0} \\ \mathbf{H_0} \end{bmatrix} = e^{tA}\mathbf{u_0}, \\ \\ \forall n \geq 0, \quad \mathbf{u}^{n+1}(t) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} B\mathbf{u}^n(s)\,ds. \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\sum_{n\geq 0} \mathbf{u}^n$ converge normalement sur l'espace de Banach $\mathbb{X}_T$ et que la somme est solution du système (5.70). Tout d'abord, notons que la suite $\mathbf{u}^n$ est bien définie. En effet, $\mathbf{u}^0$ appartient à $\mathbb{X}_T$ et, si $\mathbf{u}^n \in \mathbb{X}_T$, alors $B\mathbf{u}^n \in \mathbb{X}_T$ (d'après (5.64) et (5.65)), donc $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbb{X}_T$. Afin d'établir la convergence normale de la série, nous montrons, par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in [0,T], \quad ||\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_s} \leq \frac{C_1(T)^n s^n}{n!}||\mathbf{u_0}||_0, \tag{5.72}$$

où $C_1(T)$ est la constante introduite dans (5.71). Tout d'abord, (5.72) est vraie pour $n = 0$ étant donné que :

$$\forall t \in [0,s], \quad ||\mathbf{u}^0(t)||_0 = ||e^{tA}\mathbf{u_0}||_0 \leq ||e^{tA}||\,||\mathbf{u_0}||_0 \leq ||\mathbf{u_0}||_0,$$

puisque $A$ engendre un semi-groupe de contraction et donc $||e^{tA}|| \leq 1$. Supposons maintenant que (5.72) est vérifiée au rang $n$. On a alors :

$$\forall t \in [0,s], \quad ||\mathbf{u}^{n+1}(t)||_0 = \int_0^t ||B\mathbf{u}^n(w)||_0 \, dw. \tag{5.73}$$

Par ailleurs,

$$\forall w \in [0,t], \quad ||B\mathbf{u}^n(w)||_0 \leq ||B\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_w},$$

ce qui entraîne, d'après (5.71),

$$\forall w \in [0,t], \quad ||B\mathbf{u}^n(w)||_0 \leq C_1(T)||\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_w}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à cette dernière inégalité, on obtient :

$$\forall w \in [0,t], \quad ||B\mathbf{u}^n(w)||_0 \leq \frac{C_1(T)^{n+1}w^n}{n!}||\mathbf{u_0}||_0.$$

Grâce à (5.73), on a donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,s], \quad ||\mathbf{u}^{n+1}(t)||_0 &\leq \frac{C_1(T)^{n+1}}{n!}||\mathbf{u_0}||_0 \int_0^t w^n \, dw \\ &\leq \frac{C_1(T)^{n+1}\, t^{n+1}}{(n+1)!}||\mathbf{u_0}||_0,\end{aligned}$$

d'où $||\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_s} \leq \frac{C_1(T)^{n+1}\, s^{n+1}}{(n+1)!}||\mathbf{u_0}||_0$, ce qui démontre l'inégalité (5.72) au rang $n+1$. L'estimation (5.72) prouve que l'on a, en particulier :

$$||\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_T} \leq \frac{C_1(T)^n T^n}{n!}||\mathbf{u_0}||_0;$$

ce qui montre que $\sum_{n\geq 0} \mathbf{u}^n$ converge normalement sur $\mathbb{X}_T$. Notons $\mathbf{u}$ la somme de cette série :

$$\forall t \in [0,T], \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}^n(t).$$

L'application $\mathbf{u} \in \mathbb{X}_T \times \mathbb{X}_T$ est solution de (5.70) puisque :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = Ae^{tA}\mathbf{u_0} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A\mathbf{u}^{n+1}(t) + B\mathbf{u}^n(t)\Big) = A\mathbf{u}(t) + B\mathbf{u}(t).$$

2) *Unicité*. Supposons que (5.70) admette deux solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ associées à la même condition initiale $\mathbf{u_0} = {}^t[\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= e^{tA}\mathbf{u_0} + \int_0^t e^{(t-s)A}B\mathbf{u}(s)\,ds,\\
\mathbf{v}(t) &= e^{tA}\mathbf{u_0} + \int_0^t e^{(t-s)A}B\mathbf{v}(s)\,ds;
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}B\big(\mathbf{u}-\mathbf{v}\big)(s)\,ds. \tag{5.74}$$

Nous montrons alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \in [0,T], \quad ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s} \leq \frac{C_1(T)^{n+1}s^{n+1}}{(n+1)!}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s}. \tag{5.75}$$

La relation (5.75) est vraie au rang 0 puisque :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,s], \quad ||\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)||_0 &\leq \int_0^t ||B\big(\mathbf{u}-\mathbf{v}\big)(w)||_0\,dw\\
&\leq \int_0^t ||B\big(\mathbf{u}-\mathbf{v}\big)||_{\mathbb{X}_w}\,dw\\
&\leq \int_0^t C_1(T)||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_w}\,dw\\
&\leq C_1(T)||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s}\int_0^t dw\\
&\leq C_1(T)s||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s}.
\end{aligned}$$

Si on suppose que (5.75) est vraie au rang $n$, alors (5.75) est vérifiée au rang $n+1$ car :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,s], \quad ||\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)||_0 &\leq \int_0^t ||B\big(\mathbf{u}-\mathbf{v}\big)(w)||_0\,dw\\
&\leq \int_0^t ||B\big(\mathbf{u}-\mathbf{v}\big)||_{\mathbb{X}_w}\,dw\\
&\leq \int_0^t C_1(T)||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_w}\,dw\\
&\leq \int_0^t C_1(T)\frac{C_1(T)^{n+1}w^{n+1}}{(n+1)!}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_w}\,dw\\
&\leq \frac{C_1(T)^{n+2}}{(n+1)!}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s}\int_0^t w^{n+1}\,dw\\
&\leq \frac{C_1(T)^{n+2}s^{n+2}}{(n+2)!}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_s}.
\end{aligned}$$

La relation (5.75) montre que nous avons notamment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_T} \leq \frac{C_1(T)^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||_{\mathbb{X}_T};$$

ce qui montre que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ en faisant tendre $n$ vers l'infini. Il existe donc un unique couple $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ dans $\mathbb{X}_T \times \mathbb{X}_T$ solution du problème (5.70) avec $(\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0})$ comme condition initiale. L'unicité de $P$ et $Q$ est alors assurée par les formules (5.67) et (5.68) .

3) *Estimation (5.66).* Il nous reste à démontrer l'estimation (5.66). Le raisonnement que nous venons de mener est valable pout tout $T > 0$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \quad ||\mathbf{E}(.,t), \mathbf{H}(.,t)||_0 = ||\mathbf{u}(t)||_0 &\leq \sum_{n=0}^{\infty}||\mathbf{u}^n(t)||_0 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}||\mathbf{u}^n||_{\mathbb{X}_t} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1(t)^n t^n}{n!}||\mathbf{u_0}||_0 \\ &\leq e^{C_1(t)t}||\mathbf{u_0}||_0. \quad \square\end{aligned}$$

### 5.5.3 Vérification des hypothèses dans le cadre PML

Nous allons terminer cette partie en vérifiant que les hypothèses du (5.62), (5.63), (5.64) et (5.65) sont vérifiées lorsque $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ sont les opérateurs définis au lemme 5.2.4. Rappelons que dans ce cas, $s([\Lambda]) = [\nu^2]$ et $s([\Gamma]) = [\eta^2]$ avec :

$$\nu_x^2 = \frac{\sigma_y^2}{1+\frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} - i\frac{(\sigma_x+\sigma_y)\varepsilon_0\omega + \sigma_y^2\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega}}{1+\frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}, \qquad \nu_y^2 = \nu_z^2 = 0;$$

$$\eta_x^2 = \frac{\tau_y^2}{1+\frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}} - i\frac{(\tau_x+\tau_y)\mu_0\omega + \tau_y^2\frac{\tau_x}{\mu_0\omega}}{1+\frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}}, \qquad \eta_y^2 = \eta_z^2 = 0.$$

Nous montrons alors la proposition suivante.

**Proposition 5.5.2** *On suppose que les opérateurs pseudo-différentiels $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ admettent pour symboles respectivement $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ ; où $[\nu^2]$ et $[\eta^2]$ ont été définis au lemme 5.2.4. Alors $[\Lambda]$ et $[\Gamma]$ vérifient les hypothèses (5.62), (5.63), (5.64) et (5.65).*

**Preuve**. Nous allons faire le raisonnement sur l'opérateur $[\Lambda]$ ; il est identique pour $[\Gamma]$. Grâce à Maple, nous obtenons la transformée de Fourier inverse en temps de $\nu_x^2$ :

$$-(\sigma_x+\sigma_y)\delta_t' + \sigma_y^2\delta_t - \sigma_y^3 e^{-\sigma_y t}Y(t)$$

où $\delta_t$ désigne la distribution de Dirac et $Y$ la fonction de Heaviside. On peut alors écrire l'action de $[\Lambda]$ sur $\mathbf{E}$ :

$$[\Lambda]\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -(\sigma_x+\sigma_y)\partial_t E_x + \sigma_y^2 E_x - \sigma_y^3 e^{-\sigma_y t}Y(t) * E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.76}$$

Notons que l'on a :

$$
\begin{aligned}
-\sigma_y^3 e^{-\sigma_y t} Y(t) * E_x(.,t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y^3 e^{-(t-s)\sigma_y} Y(t-s) E_x(.,s)\, ds \\
&= -\int_0^{\infty} \sigma_y^3 e^{-(t-s)\sigma_y} Y(t-s) E_x(.,s)\, ds \\
&= -\int_0^{t} \sigma_y^3 e^{-(t-s)\sigma_y} E_x(.,s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on peut écrire $[\Lambda] = [\lambda] + [\Lambda_0]$ avec :

$$
[\lambda] = \begin{bmatrix} -(\sigma_x+\sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [\Lambda_0] = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 - \mathcal{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

où $\mathcal{L}$ est défini par :

$$
\mathcal{L}\big(E_x(.,t)\big) = -\int_0^t \sigma_y^3 e^{-(t-s)\sigma_y} E_x(.,s)\, ds.
$$

Le tenseur $[\lambda]$ appartient à $M_W$ et l'image de $\mathbb{X}_T$ par $[\Lambda_0]$ est incluse dans $\mathbb{X}_T$, ce qui montre que les hypothèses (5.62), (5.63) et (5.64) sont vérifiées. Il reste à prouver l'inégalité (5.65). Fixons $s \in [0,T]$ et prenons $\mathbf{E}$ dans $\mathbb{X}_s$. On a, pour tout $t$ dans $[0,s]$ :

$$
\left(\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,w)\, dw\right)_x = \int_0^t \sigma_y^2 E_x(.,w)\, dw - \int_0^t \left(\int_0^w \sigma_y^3 e^{-(w-\xi)\sigma_y} E_x(.,\xi)\, d\xi\right) dw, \tag{5.77}
$$

et $\left(\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,w)\, dw\right)_y = \left(\int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,w)\, dw\right)_z = 0$. Par ailleurs, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Big| \int_0^t \sigma_y^2 E_x(\boldsymbol{x},w)\, dw \Big|^2 d\boldsymbol{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sigma_y^4 \left(\int_0^t |E_x(\boldsymbol{x},w)|\, dw\right)^2 d\boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sigma_y^4 t \left(\int_0^t |E_x(\boldsymbol{x},w)|^2\, dw\right) d\boldsymbol{x} \\
&\leq |\sigma|^4 t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^t |E_x(\boldsymbol{x},w)|^2\, dw\right) d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

Comme l'application $(\boldsymbol{x},w) \to \mathbf{E}(\boldsymbol{x},w)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3\times]0,t[$, on peut appliquer le théorème de Fubini à la dernière inégalité :

$$
\int_{\mathbb{R}^3} \Big| \int_0^t \sigma_y^2 E_x(\boldsymbol{x},w)\, dw \Big|^2 d\boldsymbol{x} \leq |\sigma|^4 t \int_0^t ||\mathbf{E}(.,w)||_0^2\, dw \leq |\sigma|^4 t ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2 \int_0^t dw,
$$

ce qui entraîne :

$$
\Big|\Big| \int_0^t \sigma_y^2 E_x(\boldsymbol{x},w)\, dw \Big|\Big|_0^2 \leq |\sigma|^4 T^2 ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2. \tag{5.78}
$$

De la même manière, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_0^t \int_0^w \sigma_y^3 e^{-(w-\xi)\sigma_y} E_x(.,\xi)\, d\xi\, dw \Big|^2 &= \sigma_y^6 \Big| \int_0^t \int_0^w e^{-(w-\xi)\sigma_y} E_x(.,\xi)\, d\xi\, dw \Big|^2 \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} \left( \int_0^t \int_0^w |E_x(.,\xi)|\, d\xi\, dw \right)^2 \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} t \int_0^t \left( \int_0^w |E_x(.,\xi)|\, d\xi \right)^2 dw \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} t \int_0^t w \int_0^w |E_x(.,\xi)|^2\, d\xi\, dw \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^2 \int_0^t \int_0^w |E_x(.,\xi)|^2\, d\xi\, dw.
\end{aligned}
$$

On intègre la dernière inégalité sur $\mathbb{R}^3$, en utilisant de nouveau le théorème de Fubini :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Big| \int_0^t \int_0^w \sigma_y^3 e^{-(w-\xi)\sigma_y} E_x(\boldsymbol{x},\xi)\, d\xi\, dw \Big|^2 d\boldsymbol{x} &\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^2 \int_0^t \int_0^w ||\mathbf{E}(.,\xi)||_0^2\, d\xi\, dw \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^2 \int_0^t \int_0^w ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2\, d\xi\, dw \\
&\leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^4 ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2;
\end{aligned}
$$

ce qui montre que :

$$
\Big|\Big| \int_0^t \int_0^w \sigma_y^3 e^{-(w-\xi)\sigma_y} E_x(\boldsymbol{x},\xi)\, d\xi\, dw \Big|\Big|_0^2 \leq |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^4 ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2. \tag{5.79}
$$

Les relations (5.77), (5.78) et (5.79) montrent donc que l'on a :

$$
\Big|\Big| \int_0^t [\Lambda_0]\mathbf{E}(.,w)\, dw \Big|\Big|_0^2 \leq 2 \left( |\sigma|^4 T^2 + |\sigma|^6 e^{2|\sigma|T} T^4 \right) ||\mathbf{E}||_{\mathbb{X}_s}^2;
$$

ce qui montre que $[\Lambda_0]$ vérifie l'hypothèse (5.65) et termine la preuve de la proposition 5.5.2. $\square$

# Chapitre 6

# Résultats numériques

Nous allons maintenant tester numériquement le modèle PML que nous avons introduit au chapitre 5. Nous commençons ce chapitre en écrivant un modèle adapté aux simulations numériques. Dans un deuxième temps, nous présentons ces simulations.

## 6.1 Modèle numérique

Afin de trouver une formulation pratique pour les tests numériques, nous repartons du système (5.7) et nous nous plaçons sous les hypothèses du lemme 5.2.4. Le système (5.7) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \left(i\omega\varepsilon_0 + \sigma_x + \dfrac{\nu_x^2}{i\omega\varepsilon_0}\right) E_x = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \,, & (6.1) \\[2ex] (i\omega\varepsilon_0 + \sigma_y)\, E_y = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_y \,, & (6.2) \\[2ex] (i\omega\varepsilon_0 + \sigma_y)\, E_z = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_z \,, & (6.3) \\[2ex] \left(i\omega\mu_0 + \tau_x + \dfrac{\eta_x^2}{i\omega\mu_0}\right) H_x = -\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x \,, & (6.4) \\[2ex] (i\omega\mu_0 + \tau_y)\, H_y = -\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y \,, & (6.5) \\[2ex] (i\omega\mu_0 + \tau_z)\, H_z = -\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z \,. & (6.6) \end{cases}$$

Par ailleurs, (voir le lemme 5.2.4) les applications $\nu_x^2$ et $\eta_x^2$ sont définies par :

$$\nu_x^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} - i\frac{(\sigma_x + \sigma_y)\varepsilon_0\omega + \sigma_y^2\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\omega}}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}, \tag{6.7}$$

$$\eta_x^2 = \frac{\tau_y^2}{1 + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}} - i\frac{(\tau_x + \tau_y)\mu_0\omega + \tau_y^2\frac{\tau_x}{\mu_0\omega}}{1 + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}}. \tag{6.8}$$

On injecte alors (6.7) dans (6.1) et (6.8) dans (6.3), ce qui conduit aux deux équations :

$$\frac{i\omega\varepsilon_0 - \sigma_y}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} E_x = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \,,$$

$$\frac{i\omega\mu_0 - \tau_y}{1 + \frac{\tau_y^2}{\mu_0^2\omega^2}} H_x = - (\mathrm{rot}\mathbf{E})_x \,;$$

ou encore :

$$\varepsilon_0^2\omega^2(i\omega\varepsilon_0 - \sigma_y)E_x = (\varepsilon_0^2\omega^2 + \sigma_y^2)\,(\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \,,$$

$$\mu_0^2\omega^2(i\omega\mu_0 - \tau_y)H_x = -(\mu_0^2\omega^2 + \tau_y^2)\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x \,.$$

En remplaçant $i\omega$ par $\partial_t$ dans ces deux dernières équations, on obtient :

$$-\,\varepsilon_0^2\partial_t^2(\varepsilon_0\partial_t - \sigma_y)E_x = (\sigma_y^2 - \varepsilon_0^2\partial_t^2)\,(\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \,,$$

$$-\,\mu_0^2\partial_t^2(\mu_0\partial_t - \tau_y)H_x = (\mu_0^2\partial_t^2 - \tau_y^2)\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x \,.$$

On simplifie alors ces équations en utilisant les factorisations suivantes :

$$\sigma_y^2 - \varepsilon_0^2\partial_t^2 = (\sigma_y - \varepsilon_0\partial_t)(\sigma_y + \varepsilon_0\partial_t),$$

et

$$\mu_0^2\partial_t^2 - \tau_y^2 = (\mu_0\partial_t - \tau_y)(\mu_0\partial_t + \tau_y);$$

ce qui montre que $E_x$ et $H_x$ vérifient les équations du second ordre en $t$ :

$$\varepsilon_0^2\partial_t^2 E_x = (\sigma_y + \varepsilon_0\partial_t)\,(\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \,, \tag{6.9}$$

$$\mu_0^2\partial_t^2 H_x = -(\mu_0\partial_t + \tau_y)\,(\mathrm{rot}\mathbf{E})_x \,. \tag{6.10}$$

Nous introduisons maintenant les inconnues auxiliaires $F_x$ et $G_x$ qui vérifient :

$$\partial_t F_x = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_x \qquad \text{et} \qquad \partial_t G_x = (\mathrm{rot}\mathbf{E})_x.$$

En intégrant les relations (6.9) et (6.10) par rapport au temps, on voit que $E_x$ et $H_x$ sont solution des équations suivantes :

$$\partial_t E_x = \frac{1}{\varepsilon_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{H})_x + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0}F_x\right), \tag{6.11}$$

$$\partial_t H_x = -\frac{1}{\mu_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{E})_x + \frac{\tau_y}{\mu_0}G_x\right). \tag{6.12}$$

En changeant $i\omega$ en $\partial_t$ dans les équations (6.2), (6.3), (6.5) et (6.6), on a donc obtenu le système du premier ordre en temps :

$$\begin{cases} \partial_t E_x = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{H})_x + \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}F_x\right), \\[2ex] \partial_t E_y = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\mathbf{H})_y - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}E_y, \\[2ex] \partial_t E_z = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\mathbf{H})_z - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}E_z, \\[2ex] \partial_t H_x = -\dfrac{1}{\mu_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{E})_x + \dfrac{\tau_y}{\mu_0}G_x\right), \\[2ex] \partial_t H_y = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y - \dfrac{\tau_y}{\mu_0}H_y, \\[2ex] \partial_t H_z = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z - \dfrac{\tau_y}{\mu_0}H_z, \\[2ex] \partial_t F_x = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_x, \qquad \partial_t G_x = (\mathrm{rot}\mathbf{E})_x. \end{cases} \tag{6.13}$$

Si l'on souhaite éliminer $\tau_y$ des équations précédentes, il suffit d'utiliser l'hypothèse $(H_1)$ qui modifie (6.13) en :

$$\begin{cases} \partial_t E_x = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{H})_x + \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}F_x\right), \\[2ex] \partial_t E_y = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\mathbf{H})_y - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}E_y, \\[2ex] \partial_t E_z = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\mathbf{H})_z - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}E_z, \\[2ex] \partial_t H_x = -\dfrac{1}{\mu_0}\left((\mathrm{rot}\mathbf{E})_x + \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}G_x\right), \\[2ex] \partial_t H_y = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{E})_y - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}H_y, \\[2ex] \partial_t H_z = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0}H_z, \\[2ex] \partial_t F_x = (\mathrm{rot}\mathbf{H})_x, \qquad \partial_t G_x = (\mathrm{rot}\mathbf{E})_x. \end{cases} \tag{6.14}$$

Notons que, dans le cas de la dimension 2 (mode TE), ce système devient :

$$\begin{cases} \partial_t E_x = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\partial_y H + \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0^2}F, \\ \\ \partial_t E_y = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\partial_x H - \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0}E_y, \\ \\ \partial_t H = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\partial_y E_x - \partial_x E_y\right) - \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0}H, \\ \\ \partial_t F = \partial_y H. \end{cases}$$

Enfin, le modèle (6.14) que nous venons de présenter est valable pour une PML dans la direction $x$. Si l'on souhaite appliquer des PML dans les directions $x$, $y$ et $z$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t E_x = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_x - \dfrac{\sigma_y+\sigma_z}{\varepsilon_0}E_x + \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0^2}F_x, \\ \\ \partial_t E_y = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_y - \dfrac{\sigma_x+\sigma_z}{\varepsilon_0}E_y + \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0^2}F_y, \\ \\ \partial_t E_z = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_z - \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{\varepsilon_0}E_z + \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0^2}F_z, \\ \\ \partial_t H_x = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_x - \dfrac{\sigma_y+\sigma_z}{\varepsilon_0}H_x - \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_0\mu_0}G_x, \\ \\ \partial_t H_y = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_y - \dfrac{\sigma_x+\sigma_z}{\varepsilon_0}H_y - \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_0\mu_0}G_y, \\ \\ \partial_t H_z = -\dfrac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_z - \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{\varepsilon_0}H_z - \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_0\mu_0}G_z, \\ \\ \partial_t \mathbf{F} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \\ \\ \partial_t \mathbf{G} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Dans ce système, $\sigma_x$ est une fonction dépendant uniquement de la variable $x$, $\sigma_y$ une fonction dépendant uniquement de $y$ et $\sigma_z$ une fonction dépendant uniquement de $z$.

## 6.2 Simulations numériques

Nous présentons les résultats obtenus en trois dimensions à partir du système (6.15). Pour la discrétisation en espace, on utilise la grille en quinconce standard [132] (figure 6.1) pour les équations de Maxwell. Pour intégrer les équations en temps, la présence des inconnues auxiliaires **F** et **G** nous conduit à utiliser une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (voir par exemple [32]) optimisée pour un stockage mémoire plus faible (voir par exemple [133]) plutôt qu'un schéma aux différences finies en quinconce en temps (*Finite Difference in the Time Domain* ou FDTD). On considère un modèle de taille $1,635 \text{ m} \times 3,635 \text{ m} \times 3,635 \text{ m}$ discrétisé par un maillage comprenant $328 \times 728 \times 728$ points. Le pas d'échantillonnage est uniforme dans les trois directions et vaut $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ mm.

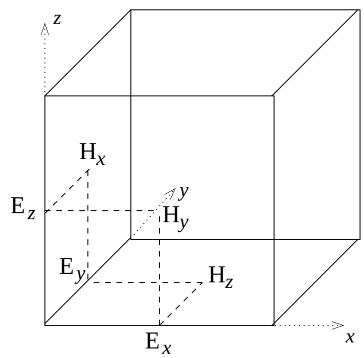



FIG. 6.1 – Grille 3D en quinconce de Yee [132] pour discrétiser les équations de Maxwell. On définit l'amortissement discret $\sigma(x)$ au niveau des nœuds de la maille pour $E_y$, $E_z$ et $H_x$ et au niveau de la demi-maille pour $E_x$, $H_y$ et $H_z$.

L'algorithme d'intégration en temps repose sur un schéma explicite. Ainsi, pour que la simulation reste stable, le pas de temps $\Delta t$ doit vérifier, en l'absence de la couche PML, la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy [45] qui dans le cas du schéma de Runge-Kutta pour la grille de Yee est (voir par exemple [127]) :

$$c\Delta t \leq \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

Dans le cas où $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ on a donc $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{2/D}$ où $D$ est la dimension spatiale du problème, c'est-à-dire qu'en dimension trois le nombre de Courant est égal à $\sqrt{2/3} \simeq 0,816$. Cependant, en présence de la couche PML, les termes $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$ de (6.15) réduisent légèrement la limite de stabilité. En pratique, nous prenons donc un nombre de Courant égal à $0,75$, ce qui correspond à un pas de temps de 12,5 picosecondes. On effectue une simulation sur 800 pas de temps, soit une durée totale de 10 nanosecondes.

Dans la première expérience, les couches absorbantes sont localisées de chaque côté du modèle, le long de l'axe des $x$ uniquement (on prend $\sigma_y = \sigma_z = 0$ dans (6.15)). Chacune de ces couches a une épaisseur de 10 points de grille. En suivant les travaux de [63] et [114], on choisit $\sigma(x) = \sigma_0(\frac{x}{L})^N$, où $L$ est l'épaisseur de la couche absorbante, $N = 2$ et $\sigma_0 = \frac{0,7(N+1)}{150\pi\Delta x} \simeq 0,891$. Sur les bords extérieurs de la couche au sommet de chaque PML, on impose une condition de conducteur électrique parfait dite PEC (*Perfect Electric Conductor*) qui est une condition de

Dirichlet sur les composantes tangentielles du champ électrique. On impose la même condition sur les bords non PML, il y a alors réflexion totale du champ.

Notons qu'un problème technique se pose : le maillage comporte $Nx \times Ny \times Nz \simeq 173{,}8$ millions de points de grille. De ce fait l'algorithme nécessite l'utilisation d'environ 5,8 gigamots de mémoire pour pouvoir être résolu car il faut stocker 36 tableaux de taille $Nx \times Ny \times Nz$ (les trois composantes du champ électrique $\mathbf{E}$, les trois composantes du champ magnétique $\mathbf{H}$ ainsi que les trois composantes de chacune des inconnues auxiliaires $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$, soit 12 composantes au total et ceci pour chacun des trois pas nécessaires pour calculer les quatre étapes du schéma de Runge-Kutta optimisé d'ordre 4 en temps, comme expliqué par exemple dans [133]). Pour un stockage en double précision (huit octets par mot) cela correspond à 46,8 gigaoctets de mémoire. Notons que nous avons besoin de stocker les six inconnues auxiliaires seulement dans la (ou les) couche(s) PML mais pas dans le reste du modèle. Ceci permettrait de réduire très significativement le stockage mémoire nécessaire. C'est uniquement pour rendre la programmation informatique plus facile que nous avons décidé de stocker ces tableaux partout.

Du fait du gros volume de calcul et de la grande taille mémoire nécessaire, il n'est pas possible d'exécuter l'algorithme de manière séquentielle sur un seul ordinateur, il faut recourir au calcul parallele. À cet effet, nous avons parallélisé notre algorithme de différences finies 3D à l'aide de communication par passage de message en utilisant la bibliothèque 'Message-Passing Interface' (MPI) (voir par exemple [67]). Nous pouvons ainsi calculer sur 56 processeurs d'un réseau de calculateurs PC Intel Itanium 64-bits bi-processeurs situé au California Institute of Technology (Caltech, Pasadena, USA). À titre indicatif, le temps d'exécution total sur ces 56 processeurs (28 nœuds bi-processeurs) pour nos simulations sur 173,8 millions de points de grille et 800 pas de temps est d'environ 1 heure.

Réalisons maintenant la première expérience numérique. La source est une onde plane se propageant vers la droite à partir du milieu $x_0$ de l'axe des $x$. L'onde initiale $E_y$ a la forme d'une gaussienne de largeur à mi-hauteur $\sigma_g = 8,2$ points de grille, la forme analytique de cette onde plane au cours du temps est

$$E_y(x,t) = e^{-\frac{(x-x_0-ct)^2}{2\sigma_g^2}} \quad \text{et} \quad H_z(x,t) = \frac{1}{\mu_0 c} E_y(x,t).$$

Sur la figure 6.2, nous représentons les instantanés de propagation de la composante $E_y$ du champ électrique, les couches absorbantes étant localisées le long de l'axe des $x$, en $x_{\min}$ et $x_{\max}$. Pour simuler cette onde plane, dans ce test nous imposons des conditions périodiques sur les bords de la grille situés suivant l'axe $y$ et suivant l'axe $z$. L'onde plane incidente donne naissance à une petite onde plane réfléchie car l'absorption n'est plus parfaite après discrétisation [42]. Cette petite onde parasite se propage dans l'autre sens et atteint alors la PML située de l'autre côté. De nouveau, elle est absorbée et donne naissance à une très petite onde réfléchie parasite. La très petite amplitude de cette onde montre l'efficacité du modèle PML à incidence normale. La figure 6.3 représente la décroissance en temps de l'énergie électromagnétique totale $\frac{1}{2}(\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \mu_0|\mathbf{H}|^2)$ pour cette onde plane. On constate que cette énergie décroît très rapidement. Cette décroissance cumulée n'est pas exponentielle car l'onde incidente a une extension spatiale gaussienne, l'énergie est donc injectée dans les couches PML de manière continue pendant une durée significative. Un agrandissement montre qu'une onde résiduelle d'énergie totale égale à 1,25e-8 revient dans le domaine de départ. Cela est dû au fait qu'après discrétisation, l'absorption n'est plus parfaite [42]. Nous pouvons observer ce phénomène sur la figure 6.2. De nouveau, cette onde est absorbée ; il reste alors un très petit résidu de 2,30e-17. Évidemment, il serait encore plus atténué lorsque l'onde atteindrait à nouveau le côté opposé.

Nous terminons cette première expérience par le calcul analytique de l'énergie totale en dehors de la PML. Le milieu est de taille $L_x \times\ L_y \times\ L_z$ (sans la PML) avec une PML suivant l'axe des $x$, et seulement sur le bord de droite ($x \geq 0$). On considère toujours une onde plane se propageant suivant l'axe des $x$ à partir de la position $-x_0$ (avec $|x_0| < L_x$). Nous prenons l'origine des $x$ à l'entrée de la PML, c'est-à-dire que $\{x \geq 0\}$ est la PML semi-infinie et $\{-L_x \leq x < 0\}$ est le milieu non PML. Nous avons vu que l'onde initiale $E_y$ a la forme d'une gaussienne de largeur à mi-hauteur égale à $\sigma$ points de grille, sa forme analytique au cours du temps est donc :

$$E_y(x,t) = Ae^{-\frac{(x-(-x_0+ct))^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad H_z(x,t) = \frac{1}{\mu_0 c} E_y(x,t),$$

où $A$ est un facteur constant définissant l'amplitude maximale de la gaussienne. L'énergie élémentaire en un point $(x,t)$ est :

$$E_{\text{elem}}(x,t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \varepsilon_0 E_y^2(x,t),$$

L'énergie totale à un instant donné integrée dans tout le milieu sans la PML est donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}^{\text{noPML}}(t) &= \int_{-L_x}^{0} \int_{0}^{L_y} \int_{0}^{L_z} E_{\text{elem}}(x,t)\, dx\, dy\, dz = \varepsilon_0 L_y L_z \int_{-L_x}^{0} E_y^2(x,t)\, dx \\ &= \varepsilon_0 L_y L_z A^2 \int_{-L_x}^{0} e^{-\frac{(x-(-x_0+ct))^2}{\sigma^2}}\, dx. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$E_{\text{tot}}^{\text{noPML}}(t) = \varepsilon_0 L_y L_z A^2 \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2} \left( \text{erf}\left( \frac{L_x + ct - x_0}{\sigma} \right) + \text{erf}\left( \frac{x_0 - ct}{\sigma} \right) \right), \tag{6.16}$$

où erf désigne la fonction d'erreur :

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-s^2}\, ds.$$

La figure 6.4 montre que la formule (6.16) fonctionne très bien et que numériquement quasiment aucune énergie n'est réflechie à l'entrée de la PML pour cette onde d'incidence normale. En effet, on observe que les courbes analytique et numérique sont presque identiques. Ceci confirme les résultats de la figure 6.2 qui montre que l'absorption par la PML discretisée est quasi parfaite pour une onde plane d'incidence normale. Cela montre aussi que l'énergie totale qui revient de la PML sous forme parasite est quasiment négligeable, comme cela est confirmé par la figure 6.3 (en haut à gauche).

Dans la seconde expérience, la source est un dipôle électrique orienté suivant l'axe des $x$ et situé en $x = 1,09$ m et $y = z = 1,82$ m. La variation en temps de la source est une dérivée seconde de gaussienne (fonction de Ricker) de fréquence dominante 2,5 GHz décalée en temps de $t_0 = 0,48$ nanoseconde par rapport à $t = 0$ afin d'avoir des conditions initiales nulles. On enregistre l'évolution au cours du temps des trois composantes du champ électrique en deux points du milieu ($x_1 = 0,54$ m, $y_1 = 2,50$ m, $z_1 = 2,50$ m) et ($x_2 = 1,30$ m, $y_2 = 3,10$ m,

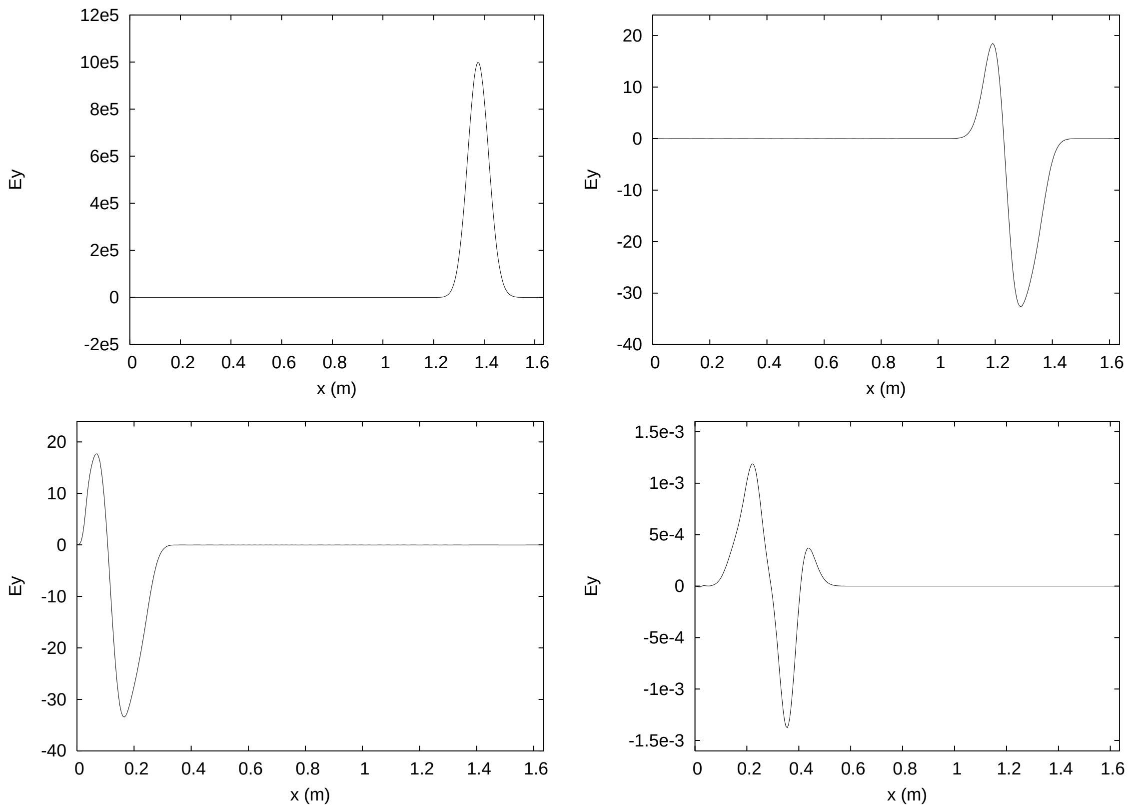



FIG. 6.2 – Instantanés de propagation de la composante $E_y$ du champ électrique se propageant le long de l'axe des $x$ dans le cas d'une onde plane d'incidence normale (en haut à gauche, au temps $t = 1,875$ ns) se propageant dans un milieu possédant deux couches PML situées en $x_{\min}$ and $x_{\max}$. Cette onde donne naissance à une petite onde plane réfléchie (en haut à droite, au temps $t = 3,75$ ns) car l'absorption n'est plus parfaite après discrétisation. Cette petite onde parasite se propage dans l'autre sens et atteint alors la PML située de l'autre côté (en bas à gauche, au temps $t = 7,5$ ns). De nouveau, elle est absorbée et donne naissance à une très petite onde réfléchie parasite (en bas à droite, au temps $t = 8,75$ ns).

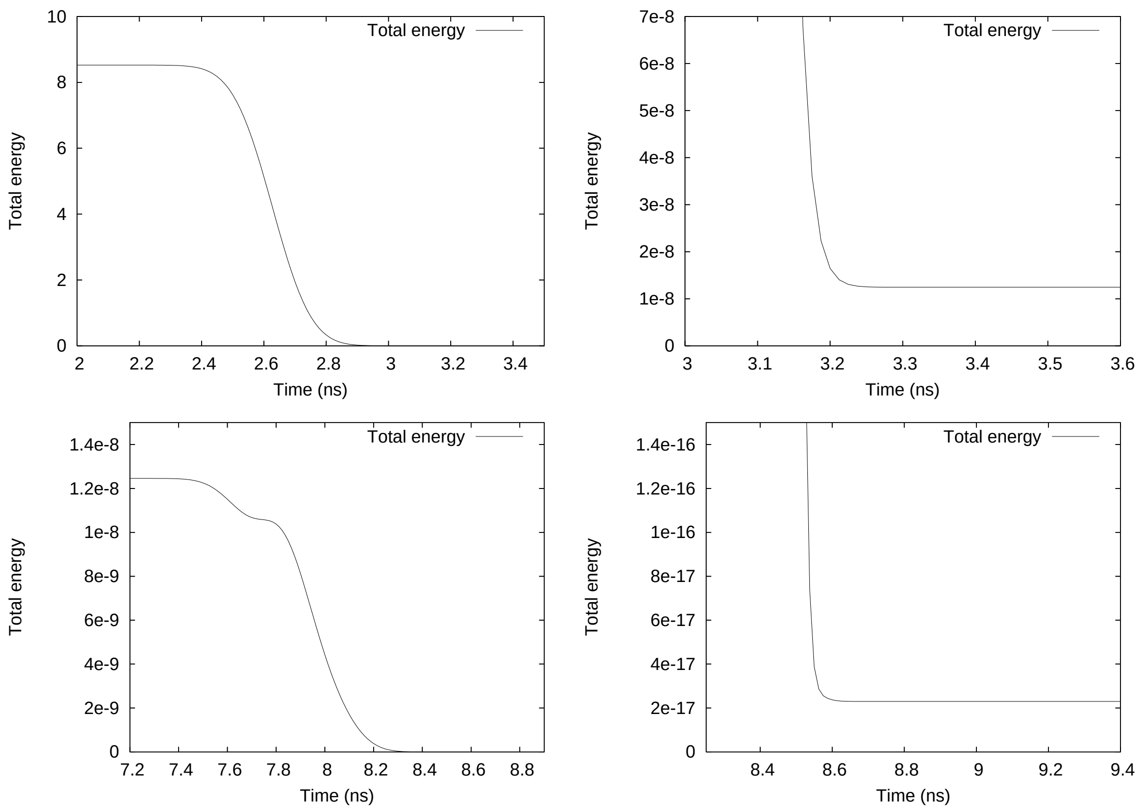



FIG. 6.3 – (en haut à gauche) Décroissance en temps de l'énergie électromagnétique totale pour une onde plane se propageant dans un milieu possédant deux couches PML (situées en $x_{\min}$ et $x_{\max}$) avec une incidence normale. La décroissance est très rapide. (en haut à droite) Un agrandissement montre qu'une onde résiduelle d'énergie totale égale à 1,25e-8 est réfléchie car l'absorption n'est plus parfaite après discrétisation. (en bas à gauche) Cette onde est de nouveau absorbée, il reste un petit résidu de 2,30e-17 (en bas à droite).

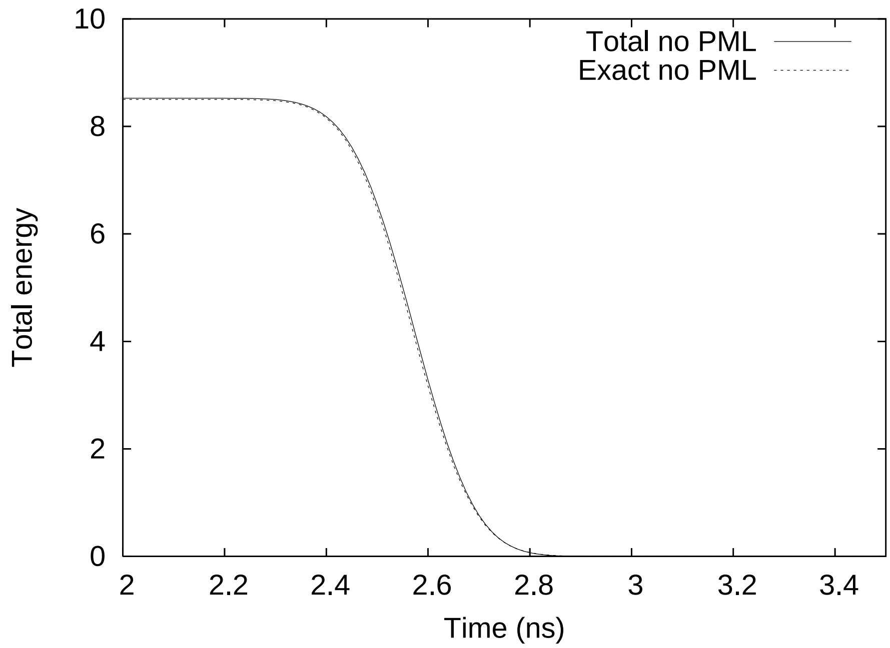
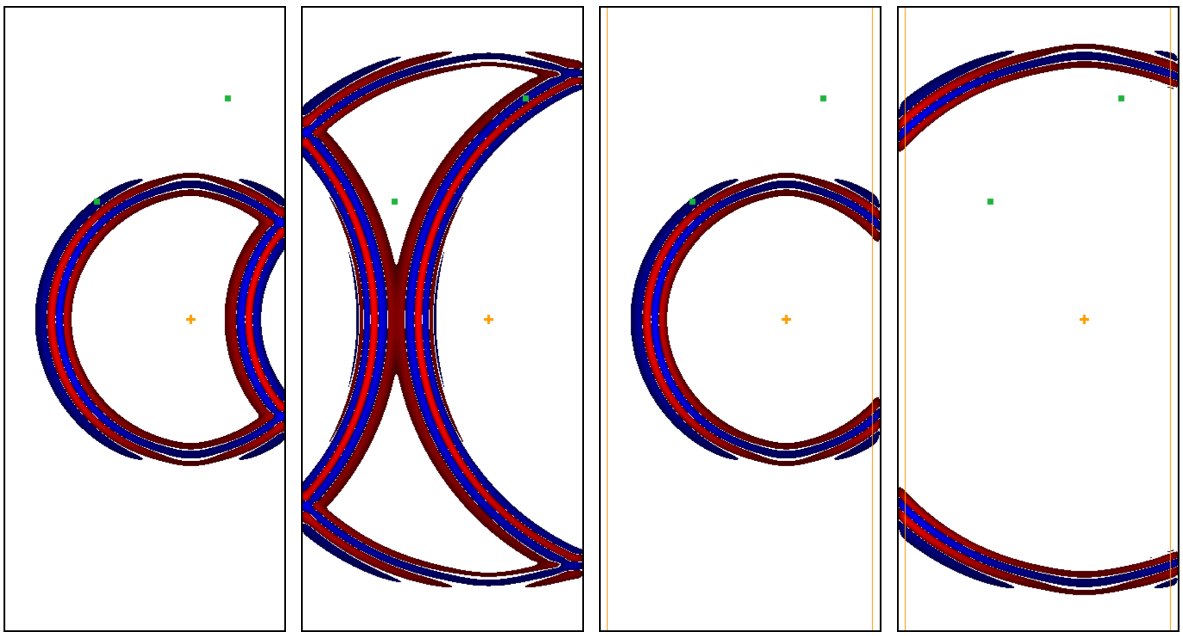



FIG. 6.4 – Énergie totale numérique $E_{\rm tot}^{\rm noPML}(t)$ dans le milieu sans PML en traits pleins et énergie totale analytique dans le milieu sans PML obtenue par l'equation (6.16) en pointillés. L'accord est quasiment parfait, ce qui montre que la quantité totale d'énergie réflechie par la PML discretisée pour une onde plane d'incidence normale est négligeable.

$z_2 = 3, 10$ m). La figure 6.5 représente les instantanés de propagation de la composante $E_y$ du champ électrique à deux pas de temps différents lors de simulations avec et sans PML. Sans PML, on observe la réflexion totale du champ sur tous les côtés parfaitement conducteurs de la grille. En présence de PML, ces réflexions sont très significativement atténuées. De plus, on ne voit pas d'ondes parasites renvoyées par les bords.

Pour analyser plus précisément l'efficacité du modèle, nous représentons sur la figure 6.6 l'évolution en temps de deux des trois composantes du champ électrique aux deux points d'enregistrement avec et sans PML. Au niveau du premier récepteur, les phases réfléchies sont très fortement absorbées, ce qui illustre l'efficacité de notre modèle PML. Cependant, comme cela a été observé par exemple dans [42], la discrétisation du modèle PML supprime sa propriété d'absorption parfaite et réduit son efficacité, notamment dans les zones où l'incidence du champ est rasante. En effet, au niveau du second récepteur, l'enregistrement montre un petit signal parasite. Ce phénomène est plus clair sur la figure 6.7, où nous représentons un plus grand nombre d'instantanés de propagation que sur la figure 6.5. On observe la réflexion totale du champ sur les côtés parfaitement conducteurs de la grille (bords haut et bas de la grille, sans PML), mais également de petites réflexions parasites générées à incidente rasante.

Afin d'analyser plus précisément l'efficacité de notre modèle et d'étudier la difficulté qui apparaît à incidence rasante, nous représentons sur la figure 6.8 un agrandissement des signaux de la figure 6.6, enregistrés en présence de PML. Nous les comparons à la solution exacte du problème posé dans un domaine infini, calculée numériquement à l'aide d'une grille de très grande taille. Cela permet de s'intéresser uniquement aux réflexions parasites provenant de la couche absorbante, et pas au bruit numérique venant de la discrétisation (qui est exactement



(a) (b) (c) (d)

FIG. 6.5 – Instantanés de propagation dans le plan situé en $NZ/2$ de la composante $E_y$ du champ électrique sans ((a) et (b)) et avec ((c) et (d)) PML, aux pas de temps 250 ((a) et (c)) et 450 ((b) et (d)). Un seuil de 1% est appliqué, c'est-à-dire que l'on représente uniquement les amplitude supérieures à ce seuil. La croix orange indique la localisation de la source (dipôle électrique orienté le long de l'axe des $x$). Les deux carrés verts indiquent la position des deux récepteurs enregistrant l'évolution en temps de deux des trois composantes du champ électrique (figure 6.6). Les deux traits verticaux orange représentent les bords des couches absorbantes. Les réflexions importantes qui se produisent sur les côtés de la grille en l'absence de PML sont quasiment supprimées avec PML. À cette échelle, aucune réflexion significative n'est visible.

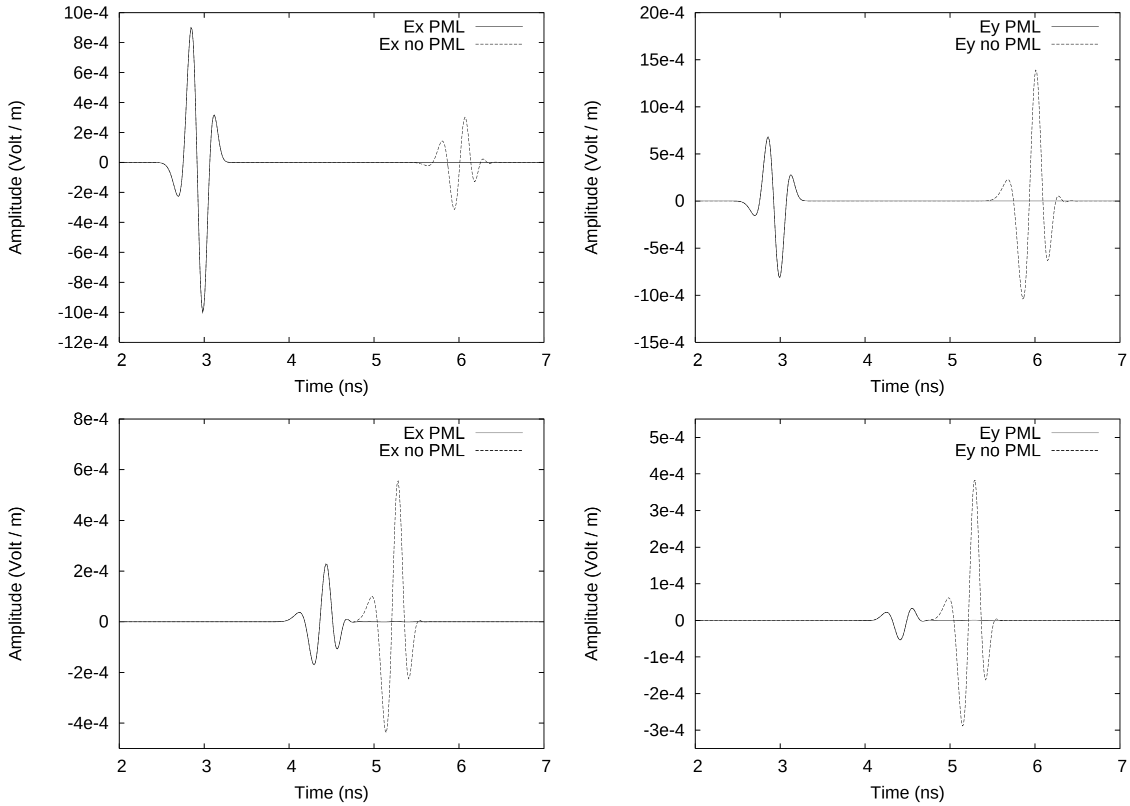



FIG. 6.6 – Évolution en temps de deux des trois composantes du champ électrique, $E_x$ (à gauche) et $E_y$ (à droite) au premier (en haut) et au second récepteur (en bas) enregistrée aux points représentés par des carrés verts sur la figure 6.5, avec (trait plein) et sans (trait pointillé) PML. Au niveau du premier récepteur, les réflexions sont quasiment absorbées. En revanche, au niveau du second récepteur, de petites réflexions parasites générées à incidence rasante sont enregistrées. Cela est difficile à remarquer à cette échelle, mais nous pouvons observer plus clairement ce phénomène sur l'agrandissement présenté sur la figure 6.8.

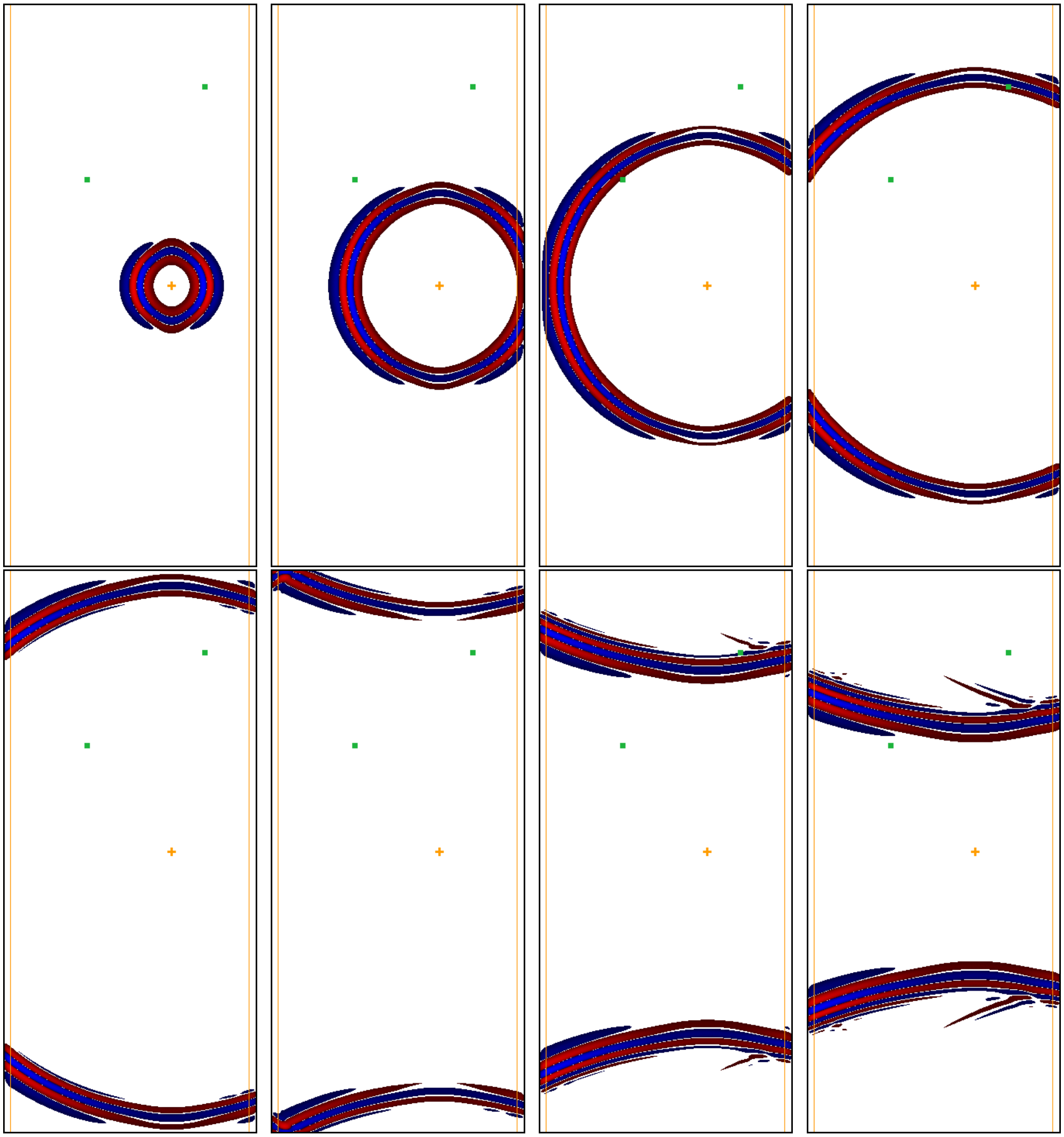


FIG. 6.7 – En comparaison avec la figure 6.5, nous montrons plus d'instantanés de propagation de la composante $E_y$ du champ électrique avec des PML à gauche et à droite de la grille. Nous les représentons tous les 100 pas de temps, du pas de temps 100 (en haut à gauche) au pas de temps 800 (en bas à droite). De nouveau, nous appliquons un seuil de 1% pour les amplitudes. La croix orange indique la localisation de la source (dipôle électrique orienté le long de l'axe des $x$). Les deux carrés verts indiquent la position des deux récepteurs enregistrant l'évolution en temps de deux des trois composantes du champ électrique (figure 6.6). Les deux traits verticaux orange représentent les bords des couches absorbantes. Les ondes sont totalement réfléchies sur les bords haut et bas parfaitement conducteurs de la grille. Un petit signal parasite apparaît à incidence rasante (visible le long du bord droit de la grille).

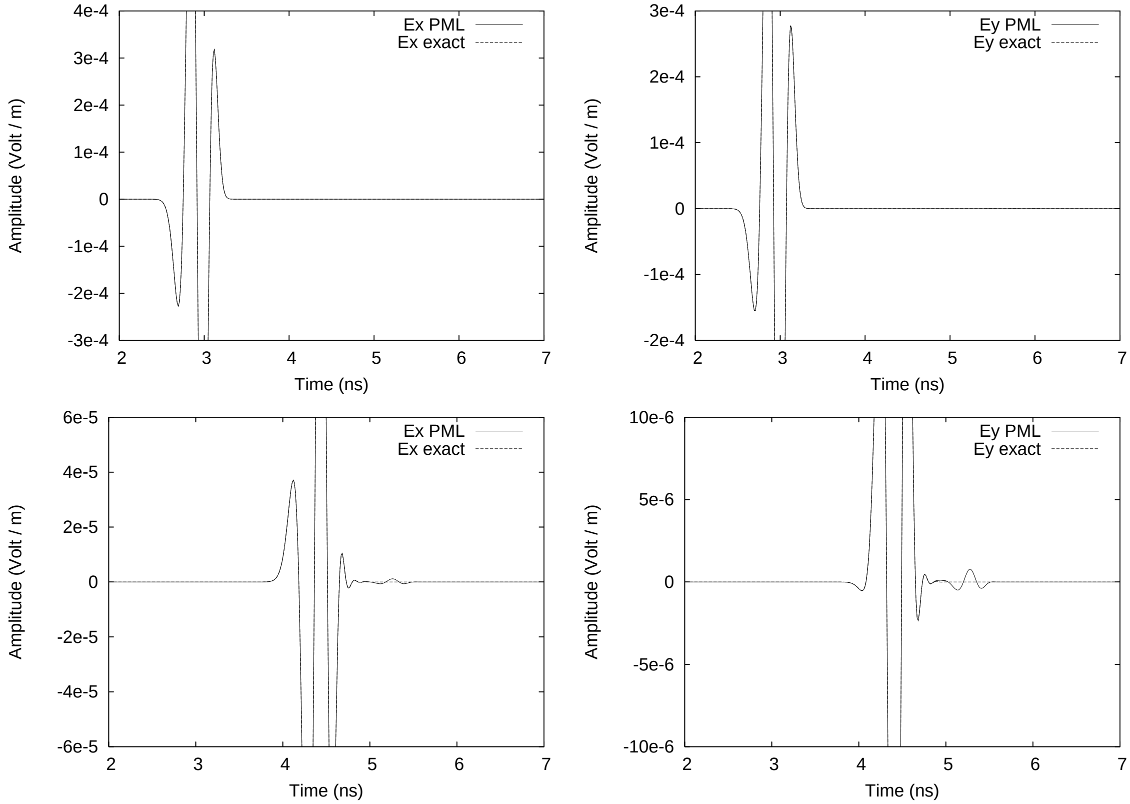



FIG. 6.8 – Agrandissement de l'évolution en temps de deux des trois composantes du champ électrique, $E_x$ (à gauche) et $E_y$ (à droite) au premier (en haut) et au second récepteur (en bas) aux points représentés par des carrés verts sur la figure 6.5, avec PML (trait plein) et comparée à la solution exacte calculée grâce au même schéma numérique dans un domaine beaucoup plus grand (trait pointillé). Au niveau du premier récepteur, l'accord est presque parfait. Au niveau du second récepteur, un petit signal parasite est enregistré à incidence rasante. À cette échelle, on constate également de petites oscillations dues à la dispersion du schéma numérique que l'on a choisi.

le même dans les deux calculs). Au niveau du premier récepteur, l'accord est presque parfait. En revanche, au niveau du second récepteur, un petit signal parasite est enregistré à incidence rasante sur le modèle discrétisé. Cela indique que de futurs développements pourraient être nécessaires pour améliorer le comportement du modèle après discrétisation. Cette difficulté n'est pas propre à notre modèle, il s'agit d'un problème inhérent aux modèles PML discrétisés. Il existe différentes approches pour améliorer les résultats numériques à incidence rasante. On peut optimiser le profil d'amortissement discret $\sigma(x)$ par une méthode de moindres carrés [42]. On peut également filtrer la solution PML en introduisant dans le modèle un terme dépendant de la fréquence ([91], [114]). Nous reviendrons sur ces techniques dans le chapitre 8 consacré à l'élastodynamique.

Dans la troisième expérience, on utilise des conditions PML sur tous les côtés de la grille, le long des trois axes $x$, $y$ et $z$. On prend donc $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$ et $\sigma_z \neq 0$ dans le système (6.15). On choisit $\sigma_y$ et $\sigma_z$ de la même forme que $\sigma_x$, c'est-à-dire que ces profils d'amortissement varient comme le carré des coordonnées à l'intérieur de la couche absorbante PML. D'un point de vue physique, cela permet de simuler un milieu infini. D'un point de vue numérique, cela permet d'étudier le problème des coins. Dans notre modèle PML (comme dans le modèle classique de [17]), il est facile de traiter le problème des coins : il suffit de sommer les contributions venant des termes $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$. Toutefois, il est important de vérifier numériquement que cela fonctionne. Ainsi, sur la figure 6.9, nous représentons les instantanés de propagation de la composante $E_y$ du champ électrique pour une simulation avec PML sur les six côtés de la grille. Nous constatons que l'onde est très fortement absorbée dans chaque couche PML. En revanche, dans les coins, le modèle PML discret est moins efficace et de petites réflexions parasites apparaissent. Les coins se comportent comme des points de diffraction qui constituent des sources secondaires parasites générant des ondes sphériques de faible amplitude. Nous n'avons pas encore étudié soigneusement l'origine de ce petit problème numérique. Cependant, nous pensons que cela pourrait venir du fait qu'en certains points de grille situés dans les coins, une ou deux des fonctions $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$ est (sont) très grande(s) par rapport aux autres (à l'autre). Cela rend alors difficile le calcul précis des termes en $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ et $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ multipliés par les coefficients d'amortissement dans le système (6.15). En effet, il y aurait alors des variations locales importantes qui ne seraient pas prises en compte précisément par le schéma de discrétisation spatiale. Les erreurs commises sur ces termes pourraient ainsi conduire à des erreurs numériques et à des imprécisions dans la mise en œuvre du modèle PML.

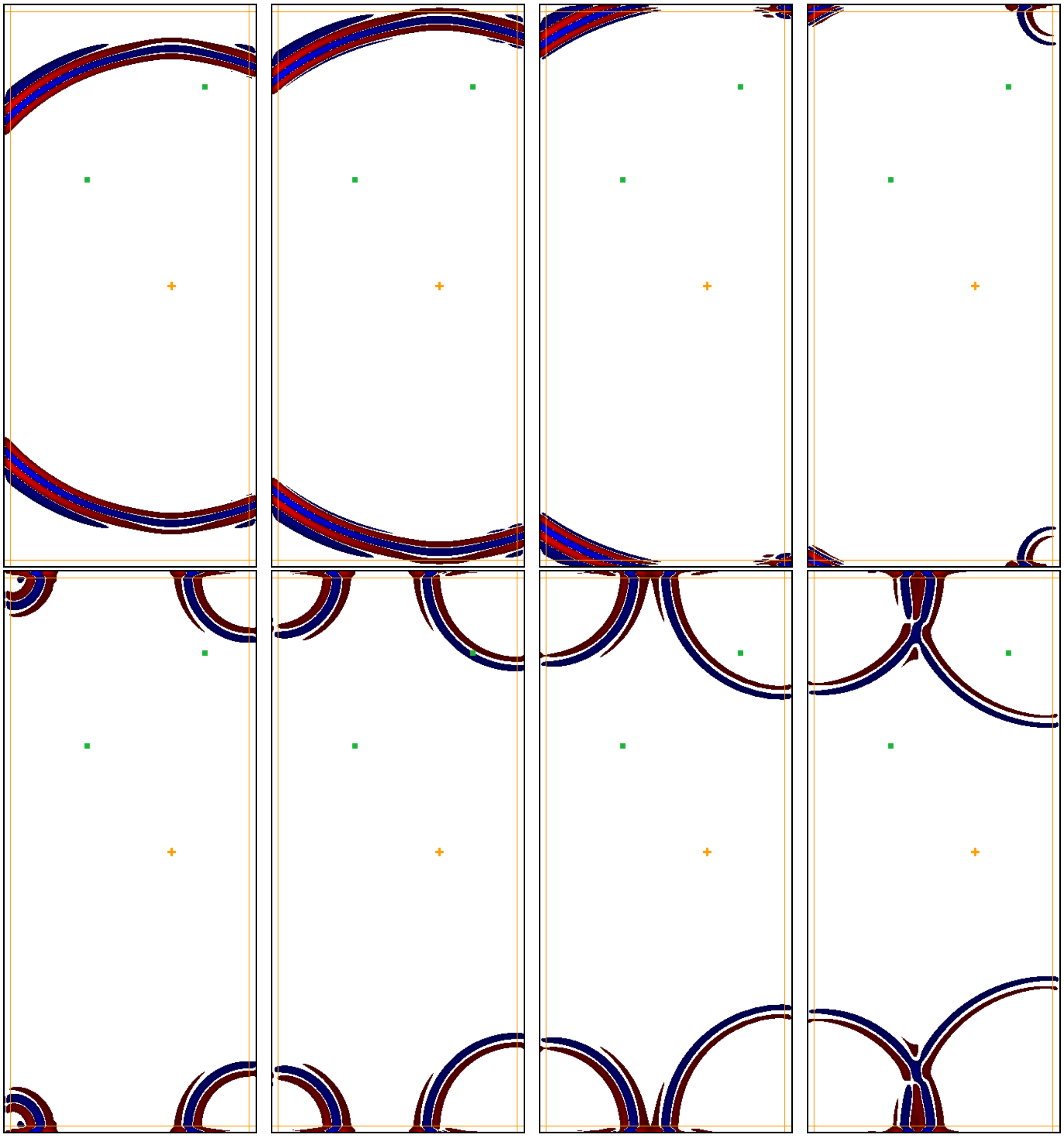


FIG. 6.9 – Instantanés de propagation dans le plan situé en $NZ/2$ de la composante $E_y$ du champ électrique lorsque l'on applique des PML sur les six côtés de la grille. Nous les représentons tous les 50 pas de temps, du pas de temps 450 (en haut à gauche) au pas de temps 800 (en bas à droite). On fixe toujours le seuil à 1% pour les amplitudes. La croix orange indique la localisation de la source (dipôle électrique orienté le long de l'axe des $x$). Les quatre traits orange représentent les bords des couches PML. Les ondes sont très fortement absorbées au sein de chaque couche PML. En revanche, dans les coins, le modèle PML discret est moins efficace et l'on observe de petites réflexions parasites. Les coins se comportent comme des points de diffraction qui constituent des sources secondaires parasites générant des ondes sphériques de faible amplitude. Ces ondes paraissent importantes sur la figure car, pour plus de clarté, nous avons amplifié les amplitudes de manière non linéaire pour chaque instantané.

Pour terminer ce chapitre, nous exposons une idée que nous avions eue initialement et que nous avions testée numériquement. Au lieu de conserver des inconnues auxiliaires et d'intégrer en temps des termes différentiels du premier ordre, nous avions éliminé les inconnues auxiliaires en les injectant dans les équations et en obtenant des termes intégraux en temps. On montre alors que cette approche conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t E_x &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{\varepsilon_0}E_x + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0^2}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_x\,dt \\
\partial_t E_y &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_y - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{\varepsilon_0}E_y + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0^2}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_y\,dt \\
\partial_t E_z &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{\varepsilon_0}E_z + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0^2}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{H})_z\,dt \\
\partial_t H_x &= -\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{\varepsilon_0}H_x - \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0\mu_0}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_x\,dt \\
\partial_t H_y &= -\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_y - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{\varepsilon_0}H_y - \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0\mu_0}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_y\,dt \\
\partial_t H_z &= -\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{\varepsilon_0}H_z - \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0\mu_0}\int_{-\infty}^{t}(\mathrm{curl}\mathbf{E})_z\,dt
\end{aligned}\right. \tag{6.17}$$

Pour la discrétisation des termes différentiels en temps de ce système, nous pouvons conserver le schéma d'intégration FDTD classique de [132], qui est en quinconce à la fois en espace et en temps. Il faut alors ajouter à ce schéma un algorithme de calcul des termes intégraux en temps, et le plus simple est de prendre la méthode des trapèzes. Cela revient à considérer chaque terme intégral comme une variable à mémoire et à lui ajouter à chaque pas de temps une nouvelle contribution qui est l'aire située sous la droite reliant la valeur du terme à intégrer à l'instant $t_{n+1}$ à celle à l'instant $t_n$.

Si l'on refait avec un tel schéma l'expérience numérique de l'onde plane incidente sur un bord PML avec une incidence normale (presentée sur les figures 6.2 et 6.3 dans le cas du schéma en temps de Runge-Kutta à l'ordre 4), on constate sur les figures 6.10 et 6.11 que ce schéma numérique fonctionne parfaitement et que les résultats obtenus sont quasiment identiques.

Cependant, il existe un problème caché. La méthode des trapèzes est seulement d'ordre un (elle intègre exactement des droites) et non pas d'ordre deux comme le reste du schéma FDTD de [132]. Ainsi, les termes intégraux sont calculés avec une précision significativement moins bonne que les autres termes. Il s'agit d'un problème important car, dans la couche PML, il est crucial de bien calculer ces termes. En effet, ils sont multipliés par les coefficients d'amortissement $\sigma_x$, $\sigma_y$ ou $\sigma_z$ et toute erreur numérique significative commise sur ces termes se trouve donc amplifiée de maniere importante dans la PML. Cela est accentué au voisinage de son sommet car c'est dans cette région que les termes d'amortissement sont les plus forts puisqu'ils varient comme une puissance de la profondeur dans la couche.

Si l'on refait maintenant l'expérience du dipôle électrique (présentée sur la figure 6.7 dans le cas du schéma en temps de Runge-Kutta à l'ordre 4), on observe sur la figure 6.12

que la qualité de l'absorption par la PML s'est significativement dégradée. En particulier, l'onde parasite qui se crée à incidence rasante apparaît beaucoup plus tôt et est d'amplitude beaucoup plus forte. Il n'est pas facile de résoudre ce problème. En effet, il faudrait calculer les termes intégraux avec une méthode d'ordre plus élevé, mais dans l'algorithme FDTD on ne dispose que des instants $t_n$ et $t_{n+1}$. On ne peut donc pas faire mieux qu'utiliser la méthode des trapèzes. Pour augmenter la précision, il faudrait par exemple avoir également stocké $t_{n-1}$ et utiliser une méthode d'intégration de Simpson, qui est d'ordre 3. Plutôt que de faire cela, il nous a paru finalement plus simple de conserver les inconnues auxiliaires et d'intégrer simultanément tous les termes différentiels d'ordre un en temps du système (6.15) à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4.

Par ailleurs, dans le cas de la méthode FDTD couplée à la méthode des trapèzes pour les termes intégraux, nous avons observé un autre problème. La perte de précision numérique mentionnée ci-dessus induit également une perte de stabilité dans les couches PML. Bien entendu, il faut réduire le pas de temps car, dans le cas du schéma FDTD, la limite de stabilité théorique du schéma en temps est $1/\sqrt{D}$, où $D$ est la dimension spatiale du problème, alors que nous avons vu que pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 elle est $\sqrt{2/D}$. Cela conduit à réduire le pas de temps d'un facteur $\sqrt{2} \simeq 1,414$. Ce n'est pas un problème car le schéma FDTD est largement moins coûteux en quantité de calcul que le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4, qui nécessite quatre étapes complètes de calcul pour passer de l'instant $t_n$ à l'instant $t_{n+1}$. Ainsi, les différences de stabilité et de coût entre les deux schémas se compensent partiellement. Mais cette analyse n'est valable que pour les schémas en l'absence des termes d'amortissement présents dans la couche PML. Quand ces termes sont présents, nous constatons dans nos expériences numériques que le nombre de Courant pour le schéma FDTD associé à la méthodes des trapèzes doit être choisi significativement en dessous du nombre de Courant théorique. En pratique, dans le cas d'une couche PML située suivant l'axe $x$ seulement, comme dans les deux expériences numériques présentées ci-dessus, nous devons prendre $0,45$, alors que la limite théorique est $1/\sqrt{D} \simeq 0.577$. Par ailleurs, lorsque nous essayons de reproduire l'expérience de la figure 6.9 (qui teste notamment les coins de la grille), nous observons des instabilités numériques très fortes genérées dans les coins et la simulation explose assez rapidement après quelques centaines de pas de temps. Il semble donc que le manque de précision dans le calcul des termes intégraux génère une instabilité numérique qui est particulièrement importante dans les coins et qui fait exploser le schéma. Ceci constitue une raison supplémentaire pour justifier notre choix final de conserver les inconnues auxiliaires et d'intégrer tous les termes différentiels d'ordre un en temps apparaissant dans le système (6.15) à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4.

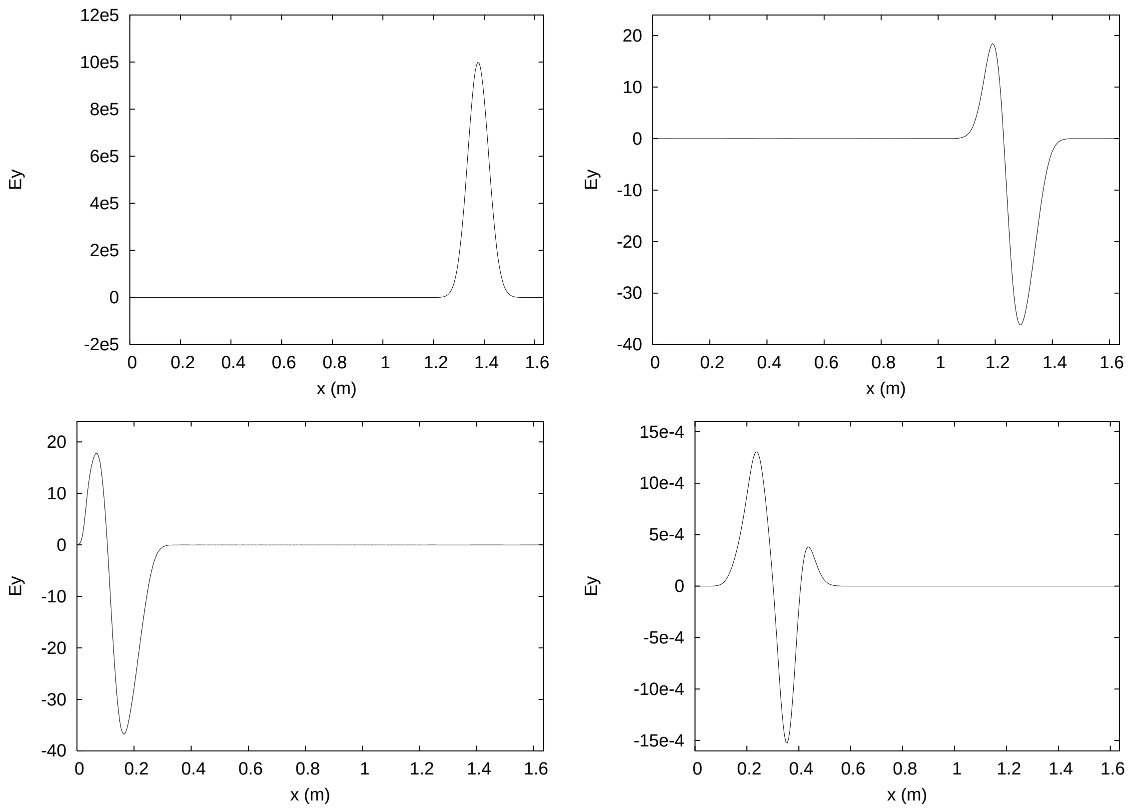



Fig. 6.10 – Même expérience numérique que sur la figure 6.2 mais dans le cas où l'on utilise un schéma d'intégration en temps basé sur la méthode FDTD pour calculer les termes différentiels et sur la méthode des trapèzes pour calculer les termes intégraux. Les résultats sont très semblables à ceux obtenus sur la figure 6.2. L'onde incidente donne naissance à une petite onde plane réfléchie (en haut à droite, au temps $t = 3,75$ ns) car l'absorption n'est plus parfaite après discrétisation. Cette petite onde parasite se propage dans l'autre sens et atteint alors la PML située de l'autre côté (en bas à gauche, au temps $t = 7,5$ ns). De nouveau, elle est absorbée et donne naissance à une très petite onde réfléchie parasite (en bas à droite, au temps $t = 8,75$ ns).

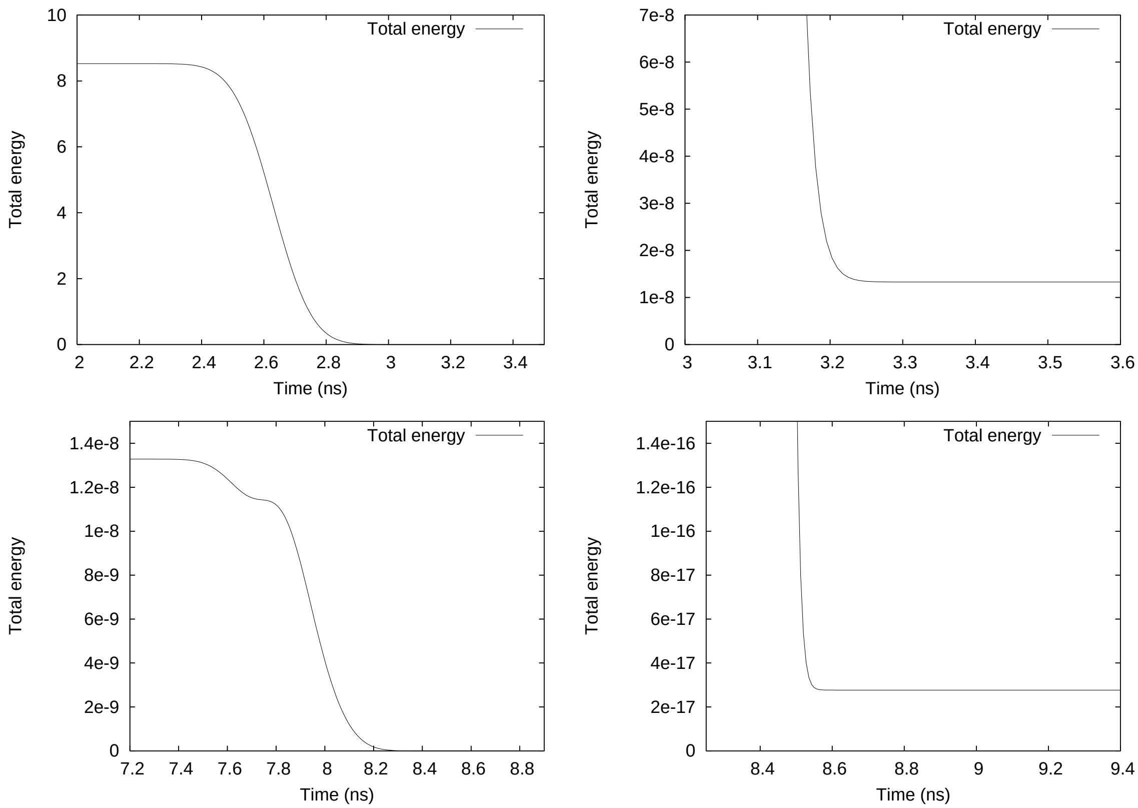



FIG. 6.11 – Même expérience numérique que sur la figure 6.3, mais dans le cas où l'on utilise la méthode FDTD couplée à celle des trapèzes. La décroissance de l'énergie est toujours très rapide et semblable à celle de la figure 6.3. Un agrandissement (en haut à droite) montre qu'une onde résiduelle d'énergie totale égale à 1,33e-8 est réfléchie car l'absorption n'est plus parfaite après discrétisation. Cette onde est de nouveau absorbée (en bas à gauche) et il reste un petit résidu de 2,77e-17.

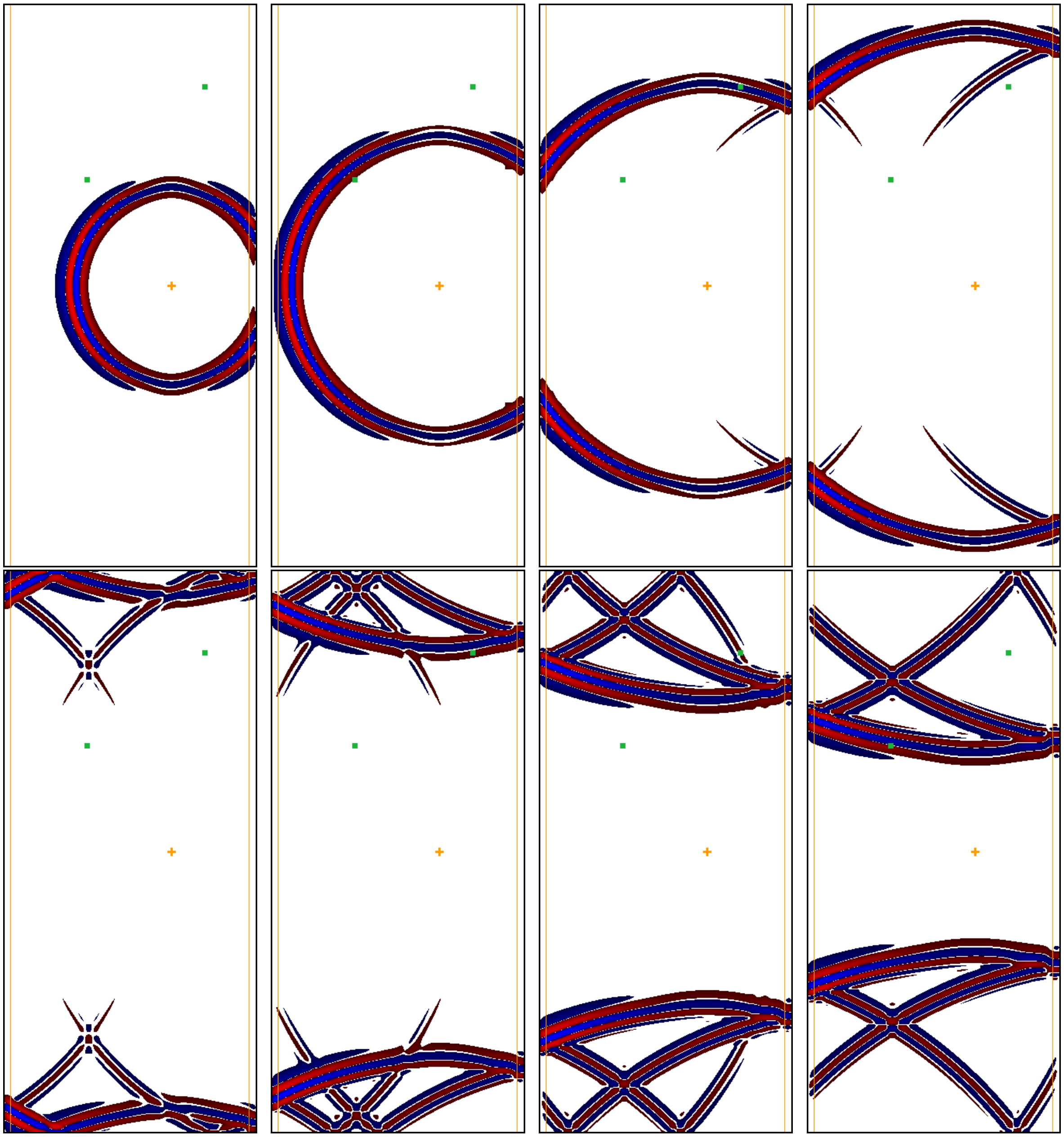


Fig. 6.12 – Même expérience numérique que sur la figure 6.7 mais dans le cas où l'on utilise un schéma d'intégration en temps basé sur la méthode FDTD pour calculer les termes différentiels et sur la méthode des trapèzes pour calculer les termes intégraux. La qualité de l'absorption par la PML se dégrade significativement et l'onde parasite qui se crée à incidence rasante apparaît beaucoup plus tôt et est d'amplitude beaucoup plus forte. Elle donne lieu à des réflexions totales sur les bords parfaitement conducteurs PEC situés sur les bords haut et bas de la grille.

# Chapitre 7

# Couplage CLA-PML sur un modèle 2D existant

## 7.1 Introduction

La mise en œuvre numérique d'un modèle PML nécessite de tronquer la couche absorbante. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un modèle PML 2D proposé par Abarbanel et Gottlieb [2] et nous développons des conditions aux limites artificielles d'ordre un et deux pour ce système. On observe que les conditions obtenues sont exactement les mêmes que celles proposées dans [119] pour le système des équations de Maxwell. Notamment, on retrouve la condition de Silver-Müller qui est la CLA la plus couramment utilisée pour les équations de Maxwell. Après avoir construit ces conditions absorbantes, nous étudions le caractère bien posé des modèles couplés résultants. On retrouve des résultats connus pour le système de Maxwell [119]. Enfin, on analyse l'efficacité des CLA sur le comportement des champs dans la couche. Pour cela, à l'aide d'une analyse par ondes planes, nous procédons à un calcul de coefficient de réflexion sur la frontière externe de la couche.

## 7.2 Conditions aux limites artificielles sur un modèle PML 2D

### 7.2.1 Présentation du modèle étudié

Nous considérons ici un modèle PML pour les équations de Maxwell en deux dimensions d'espace (mode TE) introduit par Abarbanel et Gottlieb [2] :

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases}\partial_t E_x = \partial_y H + \sigma E_x - P, & (7.1)\\ \partial_t E_y = -\partial_x H - \sigma E_y, & (7.2)\\ \partial_t H = \partial_y E_x - \partial_x E_y - \sigma H, & (7.3)\\ \partial_t P = -\sigma P + \sigma^2 E_x. & (7.4)\end{cases}$$

Comme précédemment, la couche est représentée par le demi-espace $\{x > 0\}$, l'interface vide-PML par $\{x = 0\}$ et $\sigma$ est une fonction dépendant uniquement de la variable spatiale $x$, nulle dans l'espace libre $\{x < 0\}$ et positive dans la couche $\{x > 0\}$. Dans [2], il est démontré que le modèle précédent est un modèle PML, à condition de supposer la continuité de $E_y$ et $H$ à l'interface. Si on impose de plus $\sigma(0) = 0$, on obtient aussi la continuité de $E_x$ et $P$.

Notre but est de tronquer la couche et nous fermons le système en imposant une condition aux limites sur la frontière $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = a\}$, où $a > 0$.

Il convient en premier lieu de s'assurer que le problème $(\mathcal{P}_2)$ constitue un problème bien posé, ce qui n'est pas *a priori* évident étant donné que $\sigma$ est variable (pour $\sigma$ constant, cela résulte du fait que ce système est fortement hyperbolique). Ce résultat a été démontré dans [113]. Ainsi, nous avons :

**Théorème 7.2.1** *Le modèle de couche* $(\mathcal{P}_2)$ *est un modèle PML bien posé.*

### 7.2.2 Construction des conditions aux limites artificielles

Nous allons maintenant construire des conditions aux limites sur la frontière artificielle $\Gamma$ orientée par sa normale extérieure $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$. Commençons par écrire $(\mathcal{P}_2)$ sous la forme :

$$\partial_t U + \mathcal{A}_x \partial_x U + \mathcal{A}_y \partial_y U + \mathcal{B}_\sigma U = 0, \tag{7.5}$$

avec :

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\sigma = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ -\sigma^2 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \ \ U = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H \\ P \end{bmatrix}.$$

On applique alors une transformée de Fourier-Laplace à (7.5), transformée de Fourier sur la variable tangentielle $y$ et transformée de Laplace en temps. On note :

$$\widehat{F}(x,\xi,s) = \int_0^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-st-i\xi y} F(x,y,t)\, dy \right) dt,$$

où $\xi \in \mathbb{R}$, $s = \mu + i\omega$ avec $\mu > 0$ et $F(x,y,t) = 0$ pour $t < 0$. Puisque les opérateurs $A_x$, $A_y$ et $B_\sigma$ ne dépendent que de $x$, le système (7.5) devient, sous l'effet de cette transformation :

$$s\widehat{U} + \mathcal{A}_x \partial_x \widehat{U} + i\xi \mathcal{A}_y \widehat{U} + \mathcal{B}_\sigma \widehat{U} = 0;$$

autrement dit :

$$\begin{cases} s\widehat{E_x} - i\xi \widehat{H} - \sigma \widehat{E_x} + \widehat{P} = 0, & (7.6) \\ s\widehat{E_y} + \partial_x \widehat{H} + \sigma \widehat{E_y} = 0, & (7.7) \\ s\widehat{H} + \partial_x \widehat{E_y} - i\xi \widehat{E_x} + \sigma \widehat{H} = 0, & (7.8) \\ s\widehat{P} - \sigma^2 \widehat{E_x} + \sigma \widehat{P} = 0. & (7.9) \end{cases}$$

La relation (7.9) entraîne :

$$\widehat{P} = \frac{\sigma^2}{s+\sigma} \widehat{E_x}\,; \tag{7.10}$$

ce qui donne, en injectant cette valeur dans (7.6) :

$$\widehat{E_x} = i\xi \frac{s+\sigma}{s^2} \widehat{H}. \tag{7.11}$$

En reportant (7.11) dans (7.8), on obtient alors :

$$\partial_x \widehat{E_y} = -(s+\sigma)\left(1 + \frac{\xi^2}{s^2}\right)\widehat{H}. \tag{7.12}$$

Les relations (7.7) et (7.12) fournissent alors le système différentiel (ordinaire) suivant :

$$\partial_x \widehat{V} = \mathcal{L}\widehat{V}, \tag{7.13}$$

où

$$V = \begin{bmatrix} E_y \\ \\ H \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & -(s+\sigma)\left(1+\frac{\xi^2}{s^2}\right) \\ \\ -(s+\sigma) & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathcal{L}$ est diagonalisable puisqu'elle admet deux valeurs propres distinctes $\gamma$ et $-\gamma$, où

$$\gamma = (s+\sigma)\sqrt{1+\frac{\xi^2}{s^2}}.$$

**Remarque 7.2.2** *Lorsque $\sigma = 0$ (c'est-à-dire dans l'espace libre), on retrouve les valeurs propres du système de Maxwell (voir [56], par exemple).*

En notant $\mathcal{P}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, on a :

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{P} = \mathcal{D} = \operatorname{diag}(\gamma, -\gamma),$$

avec

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \\ -\dfrac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \\ \dfrac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix},$$

où l'on a noté

$$\alpha = \frac{\gamma}{s+\sigma} = \sqrt{1+\frac{\xi^2}{s^2}}.$$

Comme $\mathcal{P}^{-1}$ est indépendante de $x$, le système (7.13) est équivalent à :

$$\partial_x\left(\mathcal{P}^{-1}\widehat{V}\right) = \mathcal{P}^{-1}\partial_x\widehat{V} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{L}\widehat{V} = \mathcal{D}\left(\mathcal{P}^{-1}\widehat{V}\right);$$

dont la solution générale est donnée par :

$$\mathcal{P}^{-1}\widehat{V} = \begin{bmatrix} Ae^{\int_0^x \gamma(u)du} \\ \\ Be^{-\int_0^x \gamma(u)du} \end{bmatrix}; \tag{7.14}$$

où $A$ et $B$ sont indépendantes de la variable $x$.
Étant donné que $\mathcal{R}e(\gamma) > 0$, un argument de vitesse de groupe déja utilisé ([56], [71]) permet d'affirmer que le facteur en $\exp\left(-\int_0^x \gamma(u)du\right)$ dans (7.14) est associé à l'onde sortante

alors que celui en exp $\left(\int_0^x \gamma(u)du\right)$ correspond à l'onde entrante. Par conséquent, la condition absorbante théorique parfaite est :

$$(\mathcal{P}^{-1}\widehat{V})_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

ce qui montre que $A = 0$ et revient à dire que la projection de $\widehat{V}$ sur le sous-espace propre $E_\gamma = \{u, \mathcal{L}u = \gamma u\}$ est nulle. En notant $\Pi(s,\xi)$ ce projecteur, on a donc :

$$\Pi(s,\xi)\,(\widehat{V}) = 0. \tag{7.15}$$

Nous introduisons maintenant l'opérateur $\widetilde{\Pi}$ de symbole :

$$\Pi(\omega,\xi) := \lim_{\mu\to 0} \Pi(s,\xi) = \lim_{\mu\to 0} \Pi(\mu + i\omega,\xi);$$

on applique alors une transformée de Fourier inverse en $t$ et $y$ à la relation (7.15) puis, en passant à la limite lorsque $\mu$ tend vers 0, on obtient la condition aux limites transparente :

$$\widetilde{\Pi}\,(\partial_t,\partial_y)\,(V) = 0 \quad \text{sur } \; ]0,\infty[\times\Gamma. \tag{7.16}$$

Afin de déterminer les conditions absorbantes, on démontre rapidement deux lemmes qui vont nous être utiles :

**Lemme 7.2.3** *Le projecteur* $\Pi$ *est donné par :*

$$\Pi(s,\xi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\dfrac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

**Preuve**. Il suffit d'écrire $\Pi(f_1) = f_1$ et $\Pi(f_2) = 0$, où $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha^{-1} \end{bmatrix}$ et $f_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$. □

**Lemme 7.2.4** *La condition aux limites transparente (7.16) s'écrit dans les variables de Fourier :*

$$\widehat{E} \wedge n + \alpha\widehat{H} = 0 \quad \textit{sur} \;\; \Gamma. \tag{7.17}$$

**Preuve**. Comme $\Pi(s,\xi)\,(\widehat{V}) = 0$ pour $x = a$, le lemme précédent montre que

$$\widehat{E_y} - \alpha\widehat{H} = 0 \quad \text{sur } \; \Gamma,$$

ce qui démontre le résultat puisque $\mathbf{n} = \mathbf{e_1}$. □

La condition aux limites transparente (7.16) étant globale en temps et en espace, elle est difficilement utilisable d'un point de vue numérique. Ainsi, il est important d'obtenir des approximations locales de la condition absorbante parfaite. Pour cela, nous allons approcher le

symbole de $\widetilde{\Pi}$.
Tout d'abord, le lemme 7.2.3 montre que le symbole de l'opérateur $\widetilde{\Pi}$ s'écrit :

$$\Pi(\omega,\xi) = \lim_{\mu\to 0} \Pi(\mu+i\omega,\xi) = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ & \\ -\alpha^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\left(1+\xi^2 s^{-2}\right)^{1/2} \\ & \\ -\left(1+\xi^2 s^{-2}\right)^{-1/2} & 1 \end{bmatrix},$$

*i.e.*

$$\Pi(\omega,\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\left(1-\xi^2 \omega^{-2}\right)^{1/2} \\ & \\ -\left(1-\xi^2 \omega^{-2}\right)^{-1/2} & 1 \end{bmatrix}.$$

En posant $\varepsilon = \xi\omega^{-1}$, on a :

$$\Pi(\omega,\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2} \\ & \\ -\left(1-\varepsilon^2\right)^{-1/2} & 1 \end{bmatrix} = \Pi(1,\varepsilon).$$

La construction de conditions absorbantes locales repose sur l'approximation du projecteur $\Pi(1,\varepsilon)$ pour $\varepsilon$ petit à l'aide d'un développement de Taylor (ou de Padé) de la racine carrée aux ordres 0 et 1. La première approximation, obtenue en conservant uniquement le terme d'ordre 0 s'écrit :

$$\Pi(1,\varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1+o(\varepsilon) \\ & \\ -1+o(\varepsilon) & 1 \end{bmatrix} = \Pi(1,0) + o(\varepsilon),$$

ce qui nous donne la première approximation de la condition aux limites transparente :

$$\Pi(1,0)\,(\widehat{V}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

soit

$$\widehat{E_y} = \widehat{H} \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse à la relation précédente, on obtient la condition aux limites absorbante d'ordre zéro :

$$E \wedge n + H = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{7.18}$$

Pour obtenir des conditions du second ordre, on écrit :

$$\Pi(1,\varepsilon) \;\; = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1+\dfrac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2) \\ & \\ -1-\dfrac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2) & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1+\dfrac{\varepsilon^2}{2} \\ & \\ -1-\dfrac{\varepsilon^2}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{M_\varepsilon} + o(\varepsilon^2),$$

ce qui conduit à deux nouvelles conditions aux limites approchées :

$$l_1(\widehat{V}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \qquad \text{et} \qquad l_2(\widehat{V}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où $l_1$ et $l_2$ désignent les lignes de $M_\varepsilon$. Autrement dit, on a :

$$\widehat{E_y} - \widehat{H} + \frac{\varepsilon^2}{2}\widehat{H} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \qquad \text{et} \qquad \widehat{H} - \widehat{E_y} - \frac{\varepsilon^2}{2}\widehat{E_y} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

On multiplie maintenant ces équations par $\omega^2$ et on effectue une transformée de Fourier inverse ; on obtient alors les conditions aux limites d'ordre deux :

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{2}\partial_y^2\right) H - \partial_t^2 E_y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{7.19}$$

et

$$\left(\partial_t^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2\right) E_y - \partial_t^2 H = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma; \tag{7.20}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{2}\partial_y^2\right) H + \partial_t^2 \left(E \wedge n\right) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{7.21}$$

et

$$\left(\partial_t^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2\right) (E \wedge n) + \partial_t^2 H = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{7.22}$$

Les conditions aux limites (7.18), (7.21) et (7.22) que nous venons d'obtenir ne dépendent pas de la fonction $\sigma$. Cela résulte du fait que la matrice de passage $\mathcal{P}$ (et donc le projecteur $\Pi$) est indépendant de $\sigma$. Plus précisément, ces trois conditions absorbantes sont exactement celles obtenues pour le système de Maxwell seul [119].

## 7.3 Analyse de la stabilité

### 7.3.1 Une première approche

Nous allons maintenant étudier la stabilité du modèle PML couplé aux CLA (7.18), (7.21) et (7.22) que nous venons de présenter, en déterminant lesquelles de ces conditions conduisent à un problème fortement bien posé au sens de Kreiss [90]. Pour analyser la stabilité au sens de Kreiss, il suffit (voir [71]) de considérer le problème posé dans le demi-espace $\mathbb{R}^2_- = \{x < 0\}$ :

$$\begin{cases} \partial_t U + \mathcal{A}_x \partial_x U + \mathcal{A}_y \partial_y U + \mathcal{B}_\sigma U = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2_-, \\ U(x,y,0) = U_0(x,y) & \text{sur } \mathbb{R}^2_-, \\ \mathcal{C}(U) = 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases} \tag{7.23}$$

où $\mathcal{C}$ désigne une des conditions aux limites introduites précédemment. Cela revient à supposer que la frontière $\Gamma$ est placée en $x = 0$, la PML en $x = -a$ et que $\sigma$ est nulle sur $\{x < -a\}$.

Le problème (7.23) est effectivement fortement bien posé au sens de Kreiss s'il n'admet pas de solution de la forme

$$U = U^0 e^{st+\lambda x+i\xi y} \tag{7.24}$$

avec

$$\mathcal{R}e\,(s) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}e\,(\lambda) > 0\,; \tag{7.25}$$

si une telle solution existe, ce problème est fortement mal posé.
Nous démontrons maintenant le résultat principal de cette partie :

**Théorème 7.3.1** *Associé à la condition (7.18) ou (7.21), le problème (7.23) est fortement bien posé.*
*En revanche, c'est un problème fortement mal posé pour la condition aux limites (7.22).*

**Preuve**. On suppose que le problème (7.23) admet une solution de la forme (7.24), (7.25). On a alors :

$$P^0 = \frac{\sigma^2}{s+\sigma} E_x^0, \tag{7.26}$$

$$E_x^0 = i\xi \frac{s+\sigma}{s^2} H^0, \tag{7.27}$$

$$E_y^0 = -\frac{\lambda}{s+\sigma} H^0, \tag{7.28}$$

$$(s+\sigma)H^0 = i\xi E_x^0 - \lambda E_y^0. \tag{7.29}$$

$(i)$ Étude de la condition (7.18) :
Dans ce cas, on a :

$$\widehat{E_y} = \widehat{H} \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

ce qui entraîne, grâce à (7.28) :
- ou bien $E_y^0 = 0$, alors $U$ est la solution nulle.
- ou bien : $\lambda = -(s+\sigma)$, ce qui est incompatible avec (7.25) puisque $\sigma$ est positive.

Par conséquent, le problème (7.23) est fortement bien posé pour la condition aux limites (7.18).

$(ii)$ Étude de la condition (7.21) :
La condition (7.21) s'écrit :

$$(s^2 + \frac{\xi^2}{2})H^0 = s^2 E_y^0,$$

c'est-à-dire, d'après (7.28) :

$$\left(s^2 + (s+\sigma)\frac{s^2+\frac{\xi^2}{2}}{\lambda}\right) E_y^0 = 0.$$

Comme précédemment, si $E_y^0 = 0$, $U$ est la solution nulle. Si $E_y \neq 0$, on a alors :

$$\lambda = -\left(s + \frac{\xi^2}{2s}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{s}\right), \tag{7.30}$$

donc

$$\lambda^2 = \frac{(2s^2 + \xi^2)^2 (s+\sigma)^2}{4s^4}. \tag{7.31}$$

Par ailleurs, les relations (7.27), (7.28) et (7.29) entraînent :

$$s + \sigma = -\frac{\xi^2}{s^2}(s+\sigma) + \frac{\lambda^2}{s+\sigma},$$

*i.e.*

$$\lambda^2 = (s+\sigma)^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{s^2}\right). \tag{7.32}$$

On égale alors les valeurs de $\lambda^2$ données par (7.31) et (7.32) :

$$(s+\sigma)^2 \left(\frac{s^2 + \xi^2}{s^2}\right) = \frac{(2s^2 + \xi^2)^2 (s+\sigma)^2}{4s^4}.$$

Comme $s + \sigma \neq 0$ (car $\sigma \geq 0$ et $\mathcal{R}e\,(s) > 0$) cette égalité est équivalente à :

$$s^2 + \xi^2 = \frac{4s^4 + 4s^2\xi^2 + \xi^4}{4s^2},$$

d'où $\xi = 0$. Mais alors la relation (7.30) devient :

$$\lambda = -(s+\sigma),$$

ce qui est impossible d'après (7.25) et la positivité de $\sigma$. Ainsi, le problème (7.23) est fortement bien posé pour (7.21).

*(iii)* Étude de la condition (7.22) :
Cette fois, nous allons montrer que le problème admet une solution de la forme (7.24), (7.25). Tout d'abord, nous disposons encore de la relation (7.32), qui est une conséquence de (7.27), (7.28) et (7.29), et ne dépend pas de la condition aux limites. Par ailleurs, la condition (7.22) s'écrit :

$$(s^2 - \frac{\xi^2}{2})E_y^0 = s^2 H^0,$$

c'est-à-dire, compte tenu de (7.27) :

$$(s^2 - \frac{\xi^2}{2})E_y^0 - \frac{s^4}{i\xi(s+\sigma)}E_x^0 = 0. \tag{7.33}$$

Enfin, les relations (7.27) et (7.28) donnent aussi :

$$E_x^0 + i\xi\frac{(s+\sigma)^2}{s^2\lambda}E_y^0 = 0. \tag{7.34}$$

Les équations (7.33) et (7.34) montrent donc que nous avons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{s^4}{i\xi(s+\sigma)} \\ & \\ i\xi\dfrac{(s+\sigma)^2}{\lambda s^2} & \dfrac{\xi^2}{2}-s^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ \\ \\ E_y^0 \end{bmatrix} = 0. \tag{7.35}$$

L'existence de solutions non nulles de (7.35) nécessite la nullité du déterminant de $\mathcal{Z}$, c'est-à-dire :

$$\xi^2 = 2s^2\left(1+\frac{s+\sigma}{\lambda}\right). \tag{7.36}$$

Puisque l'on recherche des solutions telles que $\mathcal{R}e(s) > 0$, essayons par exemple de prendre $s = \sigma + 1$ ; les relations (7.32) et (7.36) deviennent alors :

$$\lambda^2 = (2\sigma+1)^2\left(1+\frac{\xi^2}{s^2}\right),$$

$$\frac{\xi^2}{s^2} = 2\left(1+\frac{2\sigma+1}{\lambda}\right),$$

donc, en égalant les valeurs de $\xi^2 s^{-2}$ :

$$2\left(1+\frac{2\sigma+1}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{2\sigma+1}\right)^2 - 1 = \frac{(\lambda-2\sigma-1)(\lambda+2\sigma+1)}{(2\sigma+1)^2}.$$

En posant $X = 2\sigma+1$, l'équation précédente s'écrit :

$$2X^2\left(1+\frac{X}{\lambda}\right) = (\lambda - X)(\lambda + X),$$

ou encore :

$$\frac{\lambda+X}{\lambda}(\lambda^2 - \lambda X - 2X^2) = 0 \quad i.e. \quad \frac{(\lambda+X)^2}{\lambda}(\lambda - 2X) = 0.$$

La solution que l'on cherche doit vérifier $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$, le seule possibilité consiste donc à prendre $\lambda = 2X > 0$. Conformément à ce qui précède, on fait donc les choix suivants :

$$s = \sigma + 1, \quad \lambda = 2(2\sigma+1), \quad \xi^2 = 3s^2$$

et

$$U = U^0 e^{st+\lambda x + i\xi y},$$

avec

$$U^0 = \begin{bmatrix} E_x^0 \\ \\ E_y^0 \\ \\ H^0 \\ \\ P^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\xi\frac{2\sigma+1}{s^2} \\ \\ -2 \\ \\ 1 \\ \\ i\xi\frac{\sigma^2}{s^2} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $U$ est une solution de (7.23) vérifiant (7.25) ce qui montre que le problème (7.23) est fortement mal posé pour la condition aux limites (7.22) et achève la preuve du théorème. □

### 7.3.2 Complément

La démonstration du théorème 7.3.1 (plus précisément du dernier point) repose sur un choix particulier de $s$. Nous allons présenter une preuve plus générale, qui n'utilise pas un tel choix. On conserve ici les notations précédemment introduites. Commençons par démontrer le résultat suivant, inspiré de [56] :

**Proposition 7.3.2** *Le problème* $(\mathcal{P})$ *admet des solutions non nulles de la forme*

$$U = \phi(x)e^{st+i\xi} \qquad \text{avec } \mathcal{R}e(s) > 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0 \tag{7.37}$$

*si et seulement si on a :*

$$\phi(x) = Ae^{\gamma x} \begin{bmatrix} -i\xi\frac{s+\sigma}{s^2\alpha} \\ \\ 1 \\ \\ -\frac{1}{\alpha} \\ \\ -i\xi\frac{\sigma^2}{s^2\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{avec } A \neq 0. \tag{7.38}$$

**Preuve**. On suppose que $(\mathcal{P})$ admet une solution non nulle de la forme (7.37). En notant

$$\phi = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ h \\ p \end{bmatrix},$$

les équations (7.1), (7.2), (7.3) et (7.4) conduisent à :

$$\begin{aligned} &e_x = i\xi\frac{s+\sigma}{s^2}h, \\ &h' = -(s+\sigma)e_y, \\ &e_y' = -(s+\sigma)(1+\xi^2 s^{-2})h; \end{aligned}$$

*i.e.*

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix},$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur introduit précédemment. Le raisonnement mené plus haut (diagonalisation de $\mathcal{L}$) montre alors que l'on a :

$$\begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix} = \mathcal{P}\begin{bmatrix} Ae^{\gamma x} \\ \\ Be^{-\gamma x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{\gamma x} + \alpha Be^{-\gamma x} \\ \\ Be^{-\gamma x} - \frac{A}{\alpha}e^{\gamma x} \end{bmatrix}.$$

Comme $\phi$ tend vers 0 en $-\infty$ et $\mathcal{R}e(\gamma) > 0$, on obtient $B = 0$. Par conséquent, $\phi$ vérifie (7.38) avec $A \neq 0$ puisque $U$ est supposée non nulle. La réciproque est immédiate. □

À l'aide de cette proposition, nous allons donner une preuve plus simple du théorème 7.3.1 :

($i$) Étude du problème (7.23) pour la condition aux limites (7.18) :
Si ce problème admet une solution de la forme (7.37), la proposition 7.3.2 et la condition (7.18) montrent qu'il existe $A$ non nul tel que :

$$Ae^{\gamma x} = -\frac{A}{\alpha}e^{\gamma x},$$

donc $\alpha + 1 = 0$ ; ce qui est impossible étant donné que $\alpha = (1 + \xi^2 s^{-2})^{1/2}$.

($ii$) Étude du problème (7.23) pour la condition aux limites (7.21) :
On suppose de nouveau que ce problème est fortement mal posé et on écrit la condition aux limites (7.21) en utilisant la proposition 7.3.2 : il existe $A \neq 0$ vérifiant

$$s^2 Ae^{\gamma x} = -\frac{A}{\alpha}e^{\gamma x}\left(s^2 + \frac{\xi^2}{2}\right);$$

ce qui entraîne :

$$\alpha = -\left(\frac{\xi^2}{2s^2} + 1\right)s(1+\alpha) = -\frac{\xi^2}{2s},$$

incompatible avec la définition de $\alpha$ puisque $\alpha^2 = 1 + \xi^2 s^{-2}$.

($iii$) Étude du problème (7.23) pour la condition aux limites (7.22) :
Nous allons montrer que ce problème admet une solution de la forme (7.38), ce qui prouvera qu'il est fortement mal posé. En cherchant des solutions de la forme (7.38), la condition (7.22) s'écrit :

$$\left(s^2 - \frac{\xi^2}{2}\right)Ae^{\gamma x} = -A\frac{s^2}{\alpha}e^{\gamma x},$$

ce qui donne, puisque $Ae^{\gamma x} \neq 0$ :

$$\xi^2 = 2s^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \tag{7.39}$$

De plus, par définition de $\alpha$, on a :

$$\frac{\xi^2}{s^2} = \alpha^2 - 1; \tag{7.40}$$

les relations (7.39) et (7.40) montrent donc que

$$1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\xi^2}{2s^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{2},$$

d'où

$$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0 \;;$$

ce qui signifie que $\alpha$ vaut $-1$ ou 2. Or, on a déja vu au point ($i$) que $\alpha$ est différent de $-1$ ; donc nécessairement $\alpha = 2$. Notons qu'on a alors $\xi^2 = 3s^2$ grâce à (7.39) ou (7.40).
En choisissant $\xi$ et $s$ tels que $\xi^2 = 3s^2$ (avec $s > 0$), la proposition 7.3.2 montre alors que le problème ($\mathcal{P}$) admet une solution non nulle de la forme (7.37), ce qui montre que notre problème est fortement mal posé et termine cette nouvelle démonstration du théorème 7.3.1.

## 7.4 Analyse par ondes planes des conditions aux limites

Pour étudier l'efficacité des conditions aux limites absorbantes (7.18) et (7.21), nous allons maintenant analyser la réflexion d'une onde plane sur la frontière artificielle. Pour cela, nous déterminons dans un premier temps, pour chacune de ces conditions, la forme de l'onde transmise dans la PML (pour une onde plane incidente qui arrive sur l'interface vide-PML). Ensuite, nous calculons le coefficient de réflexion sur la frontière artificielle.

### 7.4.1 Calcul des champs dans la couche absorbante

À partir d'une onde plane incidente qui atteint l'interface vide-PML, nous allons déterminer la valeur des champs dans la couche absorbante $\{0 \leq x \leq a\}$. Pour cela, nous allons résoudre un système différentiel (déja étudié au paragraphe 7.2.2) en utilisant les conditions aux limites que nous avons construites.

Nous cherchons une onde plane solution particulière de $(\mathcal{P})$ sous la forme :

$$U = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_y}{\omega} \\ \frac{k_x}{\omega} \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad \text{pour } x < 0, \tag{7.41}$$

avec :

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2,$$

et

$$U = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ h \\ p \end{bmatrix} e^{i(\omega t - k_y y)} \quad \text{pour } x \geq 0; \tag{7.42}$$

où $e_x$, $e_y$, $h$ et $p$ sont des fonctions qui dépendent uniquement de la variable $x$.
En injectant (7.42) dans le système $(\mathcal{P})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\sigma^2}{\sigma + i\omega} e_x \\
e_x &= i\frac{k_y}{\omega^2}(\sigma + i\omega)h, \\
h' &= -(\sigma + i\omega)e_y, \\
e_y' &= -\frac{k_x^2}{\omega^2}(\sigma + i\omega)h.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $e_y$ et $h$ sont solutions du système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_x^2}{\omega^2}(\sigma + i\omega) \\ \\ -(\sigma + i\omega) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce système est analogue au système (7.13), étudié plus haut, avec $s = i\omega$ et $\xi = ik_y$. Le raisonnement mené au paragraphe 7.2.2 (diagonalisation de $\mathcal{L}$, voir (7.14)) montre que nous avons :

$$\begin{bmatrix} e_y \\ \\ h \end{bmatrix} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} Ae^{\int_0^x \gamma(u)du} \\ \\ Be^{-\int_0^x \gamma(u)du} \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

où

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_x}{\omega} \\ \\ -\frac{\omega}{k_x} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \gamma = \frac{k_x}{\omega}(\sigma + i\omega);$$

$A$ et $B$ étant des constantes indépendantes de la variable $x$. La relation (7.43) s'écrit aussi :

$$\begin{cases} e_y = Ae^{\int_0^x \gamma(u)du} + \frac{k_x}{\omega} Be^{-\int_0^x \gamma(u)du}, \\ \\ h = Be^{-\int_0^x \gamma(u)du} - \frac{\omega}{k_x} Ae^{\int_0^x \gamma(u)du}. \end{cases} \tag{7.44}$$

Il reste à déterminer les constantes $A$ et $B$, qui donnent les valeurs des champs $E$ et $H$. Pour cela, nous allons utiliser d'une part la condition absorbante en $x = a$, et d'autre part une hypothèse de continuité à l'interface vide-PML ; nous supposerons désormais que :

$$E_y + H \text{ est continue en } x = 0. \tag{7.45}$$

On rappelle que cette condition a été utilisée dans [2] pour établir que le modèle est PML. Compte tenu de (7.41) et (7.42), cette dernière condition s'écrit :

$$\frac{k_x}{\omega} + 1 = e_y(0) + h(0),$$

c'est-à-dire, d'après (7.44) :

$$\left(1 - \frac{\omega}{k_x}\right) A + \left(1 + \frac{k_x}{\omega}\right) B = 1 + \frac{k_x}{\omega}. \tag{7.46}$$

L'équation reliant $A$ et $B$ en $x = a$ va alors nous permettre de terminer ce calcul.
Pour plus de clarté, nous noterons dorénavant :

$$K_x = \frac{k_x}{\omega} \quad \text{et} \quad K_y = \frac{k_y}{\omega};$$

ces deux valeurs vérifiant la relation :

$$K_x^2 + K_y^2 = 1. \tag{7.47}$$

($i$) Condition aux limites (7.18) : grâce à (7.42), cette condition s'écrit $e_y(a) = h(a)$ ; c'est-à-dire, d'après (7.44) :

$$e^{K_x I} \left(1 + \frac{1}{K_x}\right) A + e^{-K_x I} (K_x - 1) B = 0 \tag{7.48}$$

où

$$I = \int_0^a (\sigma(s) + i\omega)\, ds = i\omega a + \int_0^a \sigma(s)\, ds.$$

La résolution du système (7.46), (7.48) donne :

$$A = \frac{K_x(K_x^2-1)e^{-2K_xI}}{(K_x-1)^2e^{-2K_xI}-(K_x+1)^2}, \tag{7.49}$$

$$B = -\frac{(K_x+1)^2}{(K_x-1)^2e^{-2K_xI}-(K_x+1)^2}. \tag{7.50}$$

$(ii)$ Condition aux limites (7.21). À l'aide de (7.42), elle s'écrit :

$$\left(-\omega^2+\omega^2\frac{K_y^2}{2}\right)h(d) = -\omega^2 e_y(d),$$

ou encore, en utilisant (7.44) :

$$e^{K_xI}\left[\frac{1}{K_x}\left(1-\frac{K_y^2}{2}\right)+1\right]A + e^{-K_xI}\left(K_x+\frac{K_y^2}{2}-1\right) = 0. \tag{7.51}$$

Les équations (7.46) et (7.51) donnent alors les valeurs de $A$ et $B$ suivantes :

$$A = \frac{K_x(K_x+1)\left(K_x-1+\frac{K_y^2}{2}\right)e^{-2K_xI}}{(K_x-1)e^{-2K_xI}\left(K_x-1+\frac{K_y^2}{2}\right)-(K_x+1)\left(K_x+1-\frac{K_y^2}{2}\right)}, \tag{7.52}$$

$$B = -\frac{(K_x+1)\left(K_x+1-\frac{K_y^2}{2}\right)}{(K_x-1)e^{-2K_xI}\left(K_x-1+\frac{K_y^2}{2}\right)-(K_x+1)\left(K_x+1-\frac{K_y^2}{2}\right)}. \tag{7.53}$$

**Remarque 7.4.1** *Lorsque $K_x = 1$ (donc $K_y = 0$), on obtient, pour les deux conditions, $A = 0$ et $B = 1$. Par conséquent, la réflexion de l'onde est nulle à incidence normale.*

### 7.4.2 Calcul du coefficient de réflexion

En utilisant ce qui précède, nous allons maintenant déterminer le coefficient de réflexion sur la frontière artificielle. Le résultat que nous démontrons est le suivant :

**Théorème 7.4.2** *Une onde plane qui arrive sur la frontière artificielle $\Gamma$ avec un angle d'incidence $\theta$ est réfléchie en une onde plane dont l'amplitude est multipliée par $r$ pour la condition (7.18) et par $r^2$ pour la condition (7.21), avec :*

$$r = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

**Preuve**. Les relations (7.42) et (7.44) montrent que, dans la couche $0 \leq x \leq a$, nous avons :

$$E_y = BK_x e^{-K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t-K_x x - K_y y)} + A e^{K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t+K_x x - K_y y)}, \tag{7.54}$$

$$H = Be^{-K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t-K_x x - K_y y)} - \frac{A}{K_x} e^{K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t+K_x x - K_y y)}; \tag{7.55}$$

où $A$ et $B$ sont définies par les relations (7.49) et (7.50) ou (7.52) et (7.53) selon la condition étudiée.
Par définition, le coefficient de réflexion $r$ est égal au rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente. Nous avons en particulier :

$$r = \frac{|H_{\text{ref}}|}{|H_{\text{inc}}|}.$$

L'écriture (7.55) montre que le champ $H$ se décompose sous la forme :

$$H = H_{\text{inc}} + H_{\text{ref}},$$

où le champ magnétique incident est donné par :

$$H_{\text{inc}} = Be^{-K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t-K_x x - K_y y)},$$

et le champ magnétique réfléchi s'écrit :

$$H_{\text{ref}} = \frac{A}{K_x} e^{K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t+K_x x - K_y y)}.$$

Nous avons évidemment une décomposition analogue pour $E_x$ et $E_y$.
Ainsi, le coefficient de réflexion en tout point $x$ de $[0, a]$ est donné par :

$$r(x) = \frac{|\frac{A}{K_x} e^{K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t+K_x x - K_y y)}|}{|Be^{-K_x \int_0^x \sigma(s)ds} e^{i\omega(t-K_x x - K_y y)}|} = \frac{|A| e^{K_x \int_0^x \sigma(s)ds}}{|BK_x| e^{-K_x \int_0^x \sigma(s)ds}},$$

(pour calculer ce coefficient, on pouvait utiliser le champ électrique).
Puisque l'on analyse la réflexion sur la frontière artificielle $\Gamma$, le coefficient recherché est :

$$r = r(a) = \frac{|A| e^{K_x \int_0^a \sigma(s)ds}}{|BK_x| e^{-K_x \int_0^a \sigma(s)ds}} = \left| \frac{A}{BK_x} \right| e^{2K_x I}. \tag{7.56}$$

Notons que si $\theta$ désigne l'angle que forme la direction de propagation $K = {}^t[K_x, K_y]$ avec la normale extérieure $e_1$ à la frontière artificielle $\Gamma$, on a $K_x = \cos\theta$. Comme on s'intéresse à la réflexion d'une onde plane incidente qui atteint $\Gamma$, on a $K_x > 0$ ; ce qui signifie que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.
Il reste à déterminer $r$ suivant les valeurs de $A$ et $B$, c'est-à-dire suivant la condition aux limites étudiée.

$(i)$ Pour la condition (7.18) dite de Silver-Müller, on a, grâce à (7.49), (7.50) et (7.56) :

$$r = \left| \frac{K_x(K_x^2 - 1)}{K_x(K_x + 1)^2} \right| = \left| \frac{K_x - 1}{K_x + 1} \right| = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}.$$

$(ii)$ Pour la condition (7.21), les relations (7.52), (7.53) et (7.56) montrent que :

$$r = \left| \frac{K_x(K_x+1)\left(K_x - 1 + \frac{K_y^2}{2}\right)}{K_x(K_x+1)\left(K_x + 1 - \frac{K_y^2}{2}\right)} \right| = \left| \frac{2K_x - 2 + 1 - K_x^2}{2K_x + 2 - (1 - K_x^2)} \right| = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^2},$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

**Remarque 7.4.3** *Les coefficients que nous venons d'obtenir sont exactement ceux établis pour le système des équations de Maxwell seul, pour diverses conditions aux limites absorbantes ([56], [75], [119]).*

### 7.4.3 Comparaison avec une condition aux limites usuelle

Le problème $(\mathcal{P}_2)$ a été résolu dans [2] pour des conditions aux limites classiques : continuité de $H$ en $x = 0$ et conductivité parfaite en $x = a$ ($E_y(a) = 0$). En utilisant (7.42), ces conditions s'écrivent :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad e_y(a) = 0;$$

ou encore, grâce à (7.44) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B - \dfrac{A}{K_x} = 1, \\ \\ Ae^{K_x I} + K_x B e^{-K_x I} = 0. \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$A = -\frac{K_x e^{-2K_x I}}{1 + e^{-2K_x I}}$$

et

$$B = \frac{1}{1 + e^{-2K_x I}}.$$

À l'aide de ces valeurs et de (7.56), le coefficient de réflexion sur $\Gamma$ vaut alors :

$$r = \left| \frac{-K_x}{K_x} \right| = 1.$$

Dans ce cas, non seulement la réflexion n'est plus nulle à incidence normale, mais elle est totale quel que soit l'angle d'incidence. Ceci est bien connu pour une condition de Dirichlet dite parfaitement réfléchissante.

Par conséquent, d'un point de vue théorique, les conditions que nous avons introduites sont meilleures que cette condition classique, utilisée dans la plupart des travaux pour fermer la couche PML. Si la condition de Dirichlet a toujours été privilégiée, c'est qu'elle est très simple à mettre en œuvre numériquement, et même si les champs se réfléchissent parfaitement, ils sont suffisamment amortis dans la couche pour ne pas polluer le milieu réel. Toutefois, on peut facilement imaginer que la couche doit être assez épaisse pour que l'amortissement soit efficace. On pourrait alors se demander si, en choisissant par exemple une condition de Silver-Müller, il ne serait pas possible d'optimiser la taille de la couche. Cette question n'a pas été traitée dans ce manuscrit et fera l'objet de développements ultérieurs.

# Chapitre 8

# Étude d'un modèle PML 2D existant pour l'élastodynamique

## 8.1 Présentation succincte des équations de l'élastodynamique

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations de l'élastodynamique formulées comme un système du premier ordre en vecteur vitesse et tenseur des contraintes. Cette écriture du modèle physique est classique en géophysique et a déjà été utilisée par exemple par Collino et Tsogka [43]. Par ailleurs, nous utilisons plus loin le même modèle PML que celui considéré par ces auteurs. On se restreint ici au cas bidimensionnel. Si $\mathbf{v}$ désigne le vecteur vitesse, on commence par définir le tenseur des déformations $\varepsilon$ (écrit en vitesse) dans l'hypothèse de petites déformations du milieu :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j).$$

On introduit une loi de comportement (correspondant à un milieu élastique linéaire isotrope) pour définir le tenseur des contraintes $\sigma$ à partir du tenseur des déformations $\varepsilon$ :

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\mathrm{Tr}(\varepsilon) + 2\mu\,\varepsilon_{ij},$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont les paramètres de Lamé [94], $\delta$ désigne le symbole de Kronecker et $\mathrm{Tr}(\varepsilon)$ la trace de la matrice carrée d'ordre 2 $\varepsilon$. Notons que $\sigma$ est symétrique puisque $\varepsilon$ est symétrique. Les paramètres de Lamé peuvent être exprimés en fonction de la vitesse des ondes de pression (ondes P) $V_p$ (en m.s$^{-1}$), de celle des ondes de cisaillement (ondes S) $V_s$ (en m.s$^{-1}$), et de la densité de masse du milieu $\rho$ (en kg.m$^{-3}$) à l'aide des relations :

$$\mu = \rho\,V_s^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \rho\,V_p^2 - 2\mu;$$

on a donc :

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Dans la suite, nous identifions le tenseur symétrique $\sigma$ au vecteur suivant (noté encore $\sigma$) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

En l'absence de source extérieure, les équations de l'élastodynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho\partial_t \mathbf{v} = \mathrm{div}\sigma, \\ H^{-1}\partial_t\sigma = \varepsilon(\mathbf{v}), \end{cases} \tag{8.1}$$

où la divergence de $\sigma$ est définie par :

$$\mathrm{div}\,\sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{div}\,\sigma_x \\ \mathrm{div}\,\sigma_y \end{bmatrix},$$

avec :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix}.$$

L'énergie cinétique est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}\,\rho\,\|\mathbf{v}\|^2,$$

et l'énergie potentielle est, quant à elle, donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Dans le cas d'un milieu élastique, c'est-à-dire en l'absence de dissipation (atténuation, visco-élasticité...), l'énergie totale du milieu se conserve au cours du temps :

$$E_c + E_p = \text{constante}.$$

On appelle sismogramme ou encore trace sismique l'enregistrement au cours du temps $t$ en un point $\mathbf{x}$ du milieu des composantes du vecteur déplacement $\mathbf{u}$ ou vitesse $\mathbf{v}$ (voir figure 8.1). On appelle profil sismique un ensemble de traces sismiques enregistrées à des distances différentes de la source (voir figure 8.2). Dans un tel profil les ondes ont tendance à arriver plus tard aux récepteurs (également appelés stations sismiques) situés les plus loin de la source.

Le système d'équations (8.1) peut être résolu à l'aide d'un schéma numérique discret de différences finies explicite en temps faisant intervenir le pas d'espace du maillage $\Delta x$ et le pas de temps $\Delta t$ (pour plus de détails sur cette méthode, voir par exemple [100] et [130]). Dans le cadre d'un algorithme de différences finies, la condition de stabilité du schéma numérique de R. Courant et K. O. Friedrichs et H. Lewy [45] appelée condition CFL est :

$$V_p\Delta t \leq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}}}.$$

Elle impose une limite supérieure pour le pas de temps que l'on peut choisir.

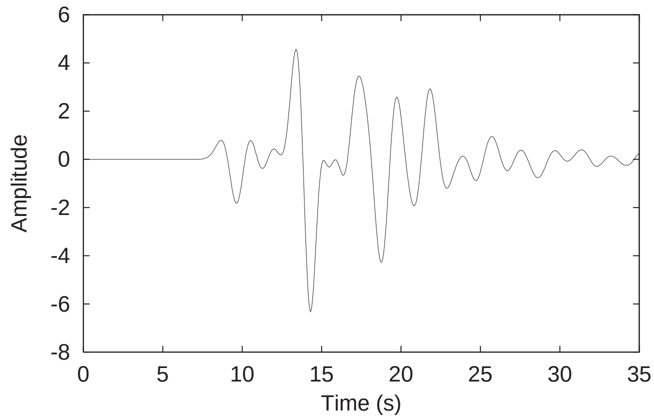



FIG. 8.1 – Un enregistrement au cours du temps $t$ en un point $\mathbf{x}$ du milieu d'une des composantes du vecteur déplacement ou vitesse est appelé sismogramme ou encore trace sismique.

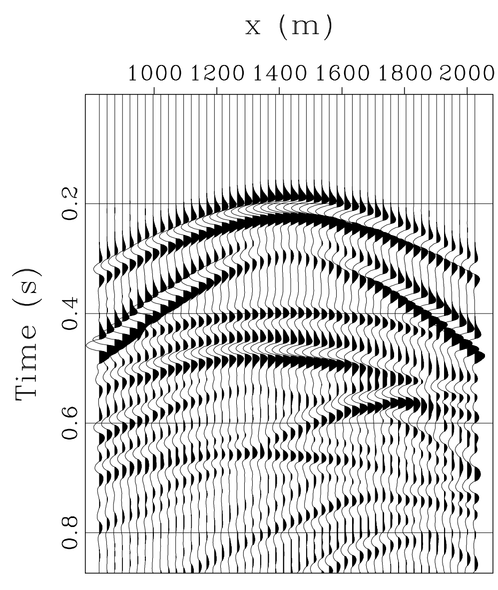



FIG. 8.2 – Un ensemble de traces sismiques enregistrées à une distance croissante de la source est appelé profil sismique.

## 8.2 Intérêt et contexte de la simulation numérique en élastodynamique dans le domaine de la géophysique

L'évolution, au cours des trente dernières années, de la puissance de calcul des ordinateurs permet maintenant d'étudier avec précision la propagation des ondes sismiques.

Parmi les différentes approches utilisées pour modéliser la propagation des ondes sismiques, la plus classique est certainement la méthode des différences finies. Elle consiste à approcher les dérivées partielles par des opérateurs discrets faisant intervenir des différences entre points de grille adjacents. Cette technique a été initialement utilisée pour discrétiser les équations de Maxwell [132] et les équations de Navier-Stokes [40]. Elle a ensuite été appliquée à l'élastodynamique [7]. La littérature traitant de cette méthode est très vaste, allant des articles historiques de [7], [6], [77], [100] et [130] aux applications réalistes aux mouvements forts du sol lors de tremblements de terre (voir par exemple [60, 59, 105, 107, 104]). La grille en quinconce standard du second ordre en espace et en temps qui est utilisée dans de nombreux travaux a été introduite par [100] et [130]. Cependant, malgré de récentes améliorations telles que les opérateurs compacts ou optimaux (voir par exemple [136, 137]), les méthodes de différences finies ont certaines limites gênantes. On peut notamment citer le calcul précis des ondes de surface, la capacité à prendre en compte des géométries complexes et la possibilité d'adapter la taille de la grille aux longueurs d'onde sismiques. Comme illustration de ces limites, notons que les méthodes de différences finies n'ont pas permis de traiter le problème posé par la sismologie à l'échelle de la Terre globale, sauf dans le cas de géométries simplifiées (voir par exemple [92, 93, 35]).

Les méthodes d'éléments frontière (voir par exemple [76]) ou les méthodes intégrales (voir par exemple [116]) ont été introduites afin de prendre en compte la topographie réaliste de surface et d'interface (voir par exemple [26]). Ces méthodes sont basées sur des théorèmes de représentation intégrale associés à des développements des fonctions de Green en nombres d'onde discrets. Toutefois, ces méthodes se limitent à des milieux composés d'un nombre fini de couches homogènes, et conduisent (dans les applications 3D) à des systèmes linéaires de grande taille et mal conditionnés. En trois dimensions, le coût de ces techniques augmente rapidement avec la résolution numérique. Ainsi, on doit souvent appliquer un seuil de troncature, ce qui conduit à des artefacts numériques dans la solution (voir par exemple [27]).

Les méthodes spectrales et pseudo-spectrales ont également été appliquées à l'élastodynamique à l'échelle locale (voir par exemple [123, 33]) ou globale (voir par exemple [61, 62]). Ces méthodes sont plus précises que les méthodes de différences finies en raison de la très faible dispersion numérique obtenue avec seulement un faible nombre de points de grille par longueur d'onde, qui peut être choisi très proche de la limite d'échantillonnage théorique de Nyquist. Cependant, en raison de la nature de la base polynômiale choisie, ces méthodes se limitent à des milieux géologiques lisses et ne peuvent pas être appliquées à des géometries complexes. Comme les méthodes de différences finies, elles ne peuvent pas non plus modéliser les ondes de surfaces avec la même précision que les ondes de volume en raison du traitement paraxial nécessaire afin d'imposer la condition de surface libre (voir par exemple [33]).

Même si elles sont bien adaptées aux géométries complexes, les méthodes d'éléments finis classiques n'ont pas été très souvent appliquées à l'élastodynamique (voir par exemple [99, 124, 9]). Cela est dû à l'importante dispersion numérique liée au bas degré des bases polynômiales utilisées [102], et également à la puissance informatique nécessaire pour résoudre les systèmes linéaires résultants.

Dans le domaine de la sismologie à l'échelle locale, régionale ou globale, de récents progès ont été effectués grâce à la méthode des éléments spectraux. Cette méthode a été introduite il y a une vingtaine d'années en mécanique des fluides par [106] et [101]. C'est une méthode variationnelle d'ordre élevé qui permet, comme les méthodes d'éléments finis, de manipuler des géométries complexes tout en conservant le taux de convergence exponentiel des méthodes spectrales. Cela explique le terme "méthode des éléments spectraux" choisi par [106], qui peut prêter à confusion puisque l'on travaille dans le domaine temporel et non dans le domaine fréquentiel. Les applications à l'élastodynamique 2D (voir par exemple [41, 112]) et 3D (voir par exemple [79, 54, 80, 118, 81, 87, 96]) se sont révélées très précises, avec une faible dispersion numérique. De plus, la méthode des éléments spectraux a été appliquée avec succès à la sismologie dans des modèles de la Terre tridimensionnels [36, 82, 83, 84, 37, 86, 38]. La méthode des éléments spectraux a aussi d'autres applications dans le domaine de la géophysique, comme par exemple la résolution de l'équation de "shallow water" [121]. Notons que très récemment la méthode de Galerkin discontinue d'ordre élevé a permis d'atteindre une très grande précision et de prendre en compte des champs discontinus [50].

## 8.3 Modèle PML utilisé pour notre étude

Le modèle PML que nous utilisons a été introduit par Collino et Tsogka [43]. Il repose sur la décomposition des inconnues $\mathbf{v}$ et $\sigma$ décrite dans l'introduction de notre travail (pour un système hyperbolique du premier ordre). On écrit :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^x + \mathbf{v}^y, \qquad \sigma = \sigma^x + \sigma^y,$$

et on injecte dans le système un coefficient d'amortissement qui est une fonction de la variable normale à la couche absorbante. Afin d'éviter les confusions nous notons, dans ce chapitre, $d$ la fonction d'amortissement. Comme nous l'avons indiqué en introduction de notre travail, les équations modifiées sont toutes celles comportant des dérivées normales par rapport au bord de la couche. Comme dans les chapitres précédents, on considère une couche plane positionnée en $x = 0$. On se place en outre dans le cas d'un milieu élastique, isotrope et homogène. Le modèle PML s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho(\partial_t + d(x))v_x^x = \partial_x \sigma_{xx} & ; & \rho\partial_t v_x^y = \partial_y \sigma_{xy}, \\ \rho(\partial_t + d(x))v_y^x = \partial_x \sigma_{xy} & ; & \rho\partial_t v_y^y = \partial_y \sigma_{yy}, \\ (\partial_t + d(x))\sigma_{xx}^x = (\lambda + 2\mu)\partial_x v_x & ; & \partial_t \sigma_{xx}^y = \lambda \partial_y v_y, \\ (\partial_t + d(x))\sigma_{yy}^x = \lambda \partial_x v_x & ; & \partial_t \sigma_{yy}^y = (\lambda + 2\mu)\partial_y v_y, \\ (\partial_t + d(x))\sigma_{xy}^x = \mu \partial_x v_y & ; & \partial_t \sigma_{xy}^y = \mu \partial_y v_x. \end{array}\right. \tag{8.2}$$

## 8.4 Caractère bien posé et stabilité du modèle PML

### 8.4.1 Caractère bien posé du modèle PML

On s'intéresse ici au caractère bien posé du système (8.2) dans le cas où $d$ est une fonction constante. Ce résultat a été établi dans un cadre général (voir [21]), celui d'un système hyperbolique d'ordre un satisfaisant des hypothèses convenables. Nous donnons ici une preuve directe. La méthode que nous utilisons est semblable à celle appliquée au système de Maxwell dans [20]. On commence par écrire le système (8.2) sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t U^x + dU^x + A_x \partial_x (U^x + U^y) = 0 \\ \\ \partial_t U^y + A_y \partial_y (U^x + U^y) = 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

avec

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho^{-1} \\ -(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\rho^{-1} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U^\alpha = \begin{bmatrix} v_x^\alpha \\ v_y^\alpha \\ \sigma_{xx}^\alpha \\ \sigma_{yy}^\alpha \\ \sigma_{xy}^\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{pour } \alpha = x, y.$$

Le système (8.3) s'écrit encore :

$$\partial_t V + \mathcal{A}_x \partial_x V + \mathcal{A}_y \partial_y V + \mathcal{C} V = 0, \tag{8.4}$$

avec

$$V = \begin{bmatrix} U^x \\ U^y \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_x = \begin{bmatrix} A_x & A_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_y & A_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} d\mathrm{I}_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On considère alors le problème de Cauchy $(\mathcal{P}_3)$ :

$$(\mathcal{P}_3) \begin{cases} \partial_t V + \mathcal{A}_x \partial_x V + \mathcal{A}_y \partial_y V + \mathcal{C} V = 0 \\ \\ V(x, y, 0) = V_0(x, y) \end{cases}$$

et on note $(\mathcal{P}_3)_h$ le problème homogène ($\mathcal{C} = 0$).
Introduisons maintenant, pour tout $\mathbf{k} = (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice symbole $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ associée à (8.4) :

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = k_x \mathcal{A}_x + k_y \mathcal{A}_y = \begin{bmatrix} k_x A_x & k_x A_x \\ k_y A_y & k_y A_y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ est :

$$\chi_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}(X) = \frac{X^6}{\rho^2}(\rho X^2 - \mu k_x^2 - \mu k_y^2)(\rho X^2 - \lambda k_x^2 - \lambda k_y^2 - 2\mu k_x^2 - 2\mu k_y^2).$$

En tenant compte des valeurs des vitesses des ondes de compression et de cisaillement se propageant dans le milieu ($V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$), on obtient :

$$\chi_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}(X) = X^6(X^2 - V_p^2|\mathbf{k}|^2)(X^2 - V_s^2|\mathbf{k}|^2).$$

On constate que, pour tout $\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^2$, les valeurs propres de $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ sont réelles. En revanche, $\mathcal{A}(k)$ n'est pas diagonalisable puisque $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ est de rang 5 (donc dim Ker $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = 5$). Par conséquent, le problème $(\mathcal{P}_3)_h$ est faiblement hyperbolique (voir chapitre 1).
En cherchant des solutions particulières de $(\mathcal{P}_3)$ de type ondes planes harmoniques :

$$V(x,y,t) = V(\mathbf{k})\exp[i(\omega(k)t - k_x x - k_y y)],$$

on est conduit à étudier l'équation de dispersion :

$$\det(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + i\mathcal{C} - \omega \mathrm{I}) = 0, \tag{8.5}$$

que l'on considère comme une équation en $\omega$. Notons $\{\omega(\mathbf{k})\}$ l'ensemble des solutions de (8.5). D'après le résultat énoncé au chapitre 1 (proposition 1.2.7), le problème $(\mathcal{P}_3)$ sera bien posé si et seulement si :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{I}m\ \omega(\mathbf{k}) \text{ est minorée.}$$

Posons :

$$P(\omega) = \det(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + i\mathcal{C} - \omega \mathrm{I}).$$

On a :

$$P(\omega) = \omega(\omega - id)\prod_{j=p,s}\left[\omega^4 - 2id\omega^3 - (d^2 + V_j^2|\mathbf{k}|^2)\omega^2 + 2iV_j^2 dk_y^2\omega + V_j^2 k_y^2 d^2\right].$$

On introduit alors, pour $l = p, s$, le polynôme $P_l$ :

$$P_l(X) = X^4 - 2idX^3 - (d^2 + V_l^2|\mathbf{k}|^2)X^2 + 2iV_l^2 dk_y^2 X + V_l^2 k_y^2 d^2,$$

et on note $\{\omega_i^l\}$ l'ensemble des racines de $P_l$. On a :

$$P(X) = X(X - id)P_p(X)P_s(X) = X(X - id)\prod_{i=1}^{4}(X - \omega_i^p)\prod_{i=1}^{4}(X - \omega_i^s).$$

À l'aide du théorème des fonctions implicites, montrons le résultat suivant :

**Lemme 8.4.1** *Lorsque $|\boldsymbol{k}|$ tend vers l'infini, on a, pour $l = p, s$, les développements asympmtotiques suivants :*

$$\omega_1^l = V_l|\boldsymbol{k}| + id\frac{k_x^2}{|\boldsymbol{k}|^2} + O(\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}),$$
$$\omega_2^l = -V_l|\boldsymbol{k}| + id\frac{k_x^2}{|\boldsymbol{k}|^2} + O(\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}),$$
$$\omega_3^l = d\left(\frac{ik_y^2 + k_xk_y}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) + O(\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}),$$
$$\omega_4^l = d\left(\frac{ik_y^2 - k_xk_y}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) + O(\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}).$$

**Preuve**. Posons
$$\tau = \frac{d}{|\mathbf{k}|},\ \mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \ \text{ et } \ \eta = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|},$$
de sorte que l'on a, pour $l = p, s$, $P_l(\omega) = |\mathbf{k}|^4 Q_l(\eta, \tau)$, avec
$$Q_l(\eta, \tau) = \eta^2(\eta^2 - V_l^2) + 2i\tau\eta(V_l^2K_y^2 - \eta^2) - \tau^2(\eta^2 - V_l^2K_y^2) = \prod_{i=1}^{4}\left(\eta - \eta_i^l\right).$$
Notons que l'on a $\forall j \in \{1, \ldots, 4\}$, $\omega_j^l = |\mathbf{k}|\eta_j^l$. L'équation $\eta^2(\eta^2 - V_l^2) = 0$ admet $V_l$ et $-V_l$ comme racines simples et 0 comme racine double.

1) Étude des branches des solutions de $Q_l = 0$ issues des points $(V_l, 0)$ et $(-V_l, 0)$.
Notons $\eta_1^l$ (respectivement $\eta_2^l$) la branche de la solution de $Q_l = 0$ issue du point $(V_l, 0)$ (respectivement $(-V_l, 0)$).
On a $\partial_\eta Q_l(V_l, 0) \neq 0$ puisque $V_l$ est racine simple de $\eta^2(\eta^2 - V_l^2) = 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites, et après développement limité de la fonction implicite, on obtient :
$$\eta_1^l = V_l + iK_x^2\tau + O(\tau^2).$$
Le même raisonnement montre que l'on a $\eta_2^l = -V_l + iK_x^2\tau + O(\tau^2)$.
Par conséquent, on obtient :
$$\omega_1^l = |\mathbf{k}|\eta_1^l = V_l|\mathbf{k}| + id\frac{k_x^2}{|\mathbf{k}|^2} + O(\frac{1}{|\mathbf{k}|}) \ \text{ et } \ \omega_2^l = |\mathbf{k}|\eta_2^l = -V_l|\mathbf{k}| + id\frac{k_x^2}{|\mathbf{k}|^2} + O(\frac{1}{|\mathbf{k}|}).$$

2) Étude au voisinage de la racine double 0 de $\eta^2(\eta^2 - V_l^2) = 0$.
En posant $\nu = -i\frac{\eta}{\tau} = -i\frac{\omega}{d}$, on a $Q_l(\eta, \tau) = \tau^2 R_l(\nu, \tau)$, avec
$$R_l(\nu, \tau) = \nu^2\tau^2(\nu - 1)^2 + V_l^2(\nu - K_y^2)^2 + V_l^2K_x^2K_y^2.$$
Comme dans le point 1), on applique le théorème des fonctions implicites à $R_l(\nu, \tau)$ aux points $K_y^2 \pm iK_xK_y$ (les racines de $V_l^2(\nu - K_y^2)^2 + V_l^2K_x^2K_y^2 = 0$). On obtient :
$$\nu = K_y^2 \pm iK_xK_y + O(\tau),$$

ce qui donne

$$\omega_3^l = id\nu_3^l = d\left(\frac{ik_y^2 + k_x k_y}{|\mathbf{k}|^2}\right) + O(\frac{1}{|\mathbf{k}|}) \ \text{ et } \ \omega_4^l = id\nu_4^l = d\left(\frac{ik_y^2 - k_x k_y}{|\mathbf{k}|^2}\right) + O(\frac{1}{|\mathbf{k}|}). \square$$

On déduit de ce lemme que la partie imaginaire des racines de $P$ est non seulement bornée (quel que soit le signe de $d$) mais aussi positive à haute fréquence si l'on choisit la constante $d$ positive. Ce dernier point traduit un phénomène de stabilité à haute fréquence. Le lemme précédent permet en outre d'énoncer le résultat suivant.

**Proposition 8.4.2** *Le problème PML (8.2) est bien posé.*

### 8.4.2 Stabilité du modèle PML

La stabilité à haute fréquence du modèle PML (8.2) pour $d$ constant a été démontrée dans [21] (voir 4.3, remarque 6). Nous allons donner ici un résultat inspiré de [20]. Nous utilisons de nouveau les notations introduites dans la preuve du lemme 8.4.1.

**Lemme 8.4.3** *On suppose ici que l'on a $K_xK_y \neq 0$. Le polynôme $S$ défini par*

$$S(x) = \tau^4 x^3 + \tau^2(2V_l^2 - \tau^2)x^2 + V_l^2(V_l^2 - 2\tau^2)x - V_l^4(1 - 2K_y^2)^2 \tag{8.6}$$

*admet une ou deux racines réelles positives. De plus, ces racines appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.*

**Preuve**. Notons que l'hypothèse $K_xK_y \neq 0$ entraîne $0 < K_y^2 < 1$ donc $0 \leq (1 - 2K_y^2)^2 < 1$. On a

$$S'(x) = 3\tau^4x^2 + 2\tau^2(2V_l^2 - \tau^2)x + V_l^2(V_l^2 - 2\tau^2) = 3\tau^4(x - x_1)(x - x_2),$$

avec $x_1 = -\dfrac{V_l^2}{\tau^2}$ et $x_2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{V_l^2}{3\tau^2}$. Remarquons que $x_1 < 0$ et $x_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{x_1}{3} > x_1$. Par ailleurs,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{-\infty} S = -\infty \\ S(x_1) = V_l^4\left[1 - (1 - 2K_y^2)^2\right] > 0 \end{array}\right\} S \text{ admet une racine } x_1^- \text{ dans } ]-\infty, x_1[,$$

$$\left.\begin{array}{l} S(0) = -V_l^4(1 - 2K_y^2)^2 \leq 0 \\ S(1) = V_l^4\left[1 - (1 - 2K_y^2)^2\right] > 0 \end{array}\right\} S \text{ admet une racine } x_0 \text{ dans } [0, 1[,$$

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1) > 0 \\ S(0) \leq 0 \end{array}\right\} S \text{ admet une racine } x_1^+ \text{ dans } ]x_1, 0].$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas (il se peut en effet que l'on ait $x_1^+ = x_0$) :
(*i*) Si $S(0) \neq 0$ (*i.e.* $K_y^2 \neq \dfrac{1}{2}$), alors $x_1^+ < 0$ et $x_0$ est l'unique racine réelle positive de $S$, ce qui prouve le lemme.
(*ii*) Si $S(0) = 0$, alors $S(x) = x\left[\tau^4x^2 + \tau^2(2V_l^2 - \tau^2)x + V_l^2(V_l^2 - 2\tau^2)\right] = 3\tau^4(x - y_1)(x - y_2)$, avec

$$y_1 = x_1^- = \frac{\tau^2 - 2V_l^2 - \sqrt{4\tau^2V_l^2 + \tau^4}}{2\tau^2} < 0 \quad \text{ et } \quad y_2 = \frac{\tau^2 - 2V_l^2 + \sqrt{4\tau^2V_l^2 + \tau^4}}{2\tau^2} \leq 1.$$

Dans ce cas, les racines positives de $S$ sont 0 et éventuellement $y_2$, d'où le lemme. $\square$

On établit maintenant la proposition suivante :

**Proposition 8.4.4** *Pour $l = p, s$, les racines $\{\omega_j^l\}_{j=1..4}$ de $P_l$ vérifient $\omega_3^l = -\overline{\omega}_1^l$, $\omega_4^l = -\overline{\omega}_2^l$ et on a*

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2,\ \forall j \in \{1..4\},\ 0 \leq \mathcal{I}m\, \omega_j^l \leq d.$$

**Preuve**. On utilise les notations introduites dans la preuve du lemme 8.4.1. Rappelons que l'on a

$$R_l(\nu) = \nu^2\tau^2(\nu-1)^2 + V_l^2(\nu - K_y^2)^2 + V_l^2 K_x^2 K_y^2.$$

Déterminer les racines de $P_l$ revient à déterminer celles de $R_l$.

1) Si $K_y = 0$, on a $R_l(\nu) = \nu^2\left[\tau^2(\nu-1)^2 + V_l^2\right]$ ; les racines de $R_l$ sont $1 + i\dfrac{V_l}{\tau}$, $1 - i\dfrac{V_l}{\tau}$ et 0 (racine double). Autrement dit, on a :

$$\omega_1^l = \omega_3^l = 0,$$
$$\omega_2^l = -\overline{\omega}_4^l = V_l|\mathbf{k}| + id.$$

2) Si $K_x = 0$ ($K_y^2 = 1$), on a $R_l(\nu) = (\nu-1)^2(\nu^2\tau^2 + V_l^2)$ et les racines de $R_l$ sont $i\dfrac{V_l}{\tau}$, $-i\dfrac{V_l}{\tau}$ et 1 (racine double), d'où

$$\omega_1^l = \omega_3^l = id,$$
$$\omega_2^l = -\overline{\omega}_4^l = V_l|\mathbf{k}| + id.$$

3) On vient donc de démontrer la proposition 8.4.4 dans le cas où $K_xK_y = 0$. On suppose désormais que l'on a $K_xK_y \neq 0$. Tout d'abord, il est clair que dans ce cas, $R_l$ n'a pas de racine réelle ($\forall \nu \in \mathbb{R},\ R_l(\nu) > 0$) donc $R_l$ admet deux couples de racines complexes conjuguées $(\nu_1^l, \overline{\nu}_1^l)$ et $(\nu_2^l, \overline{\nu}_2^l)$. On note $a_1$ (respectivement $a_2$) la partie réelle de $\nu_1^l$ (respectivement $\nu_2^l$) et $b_1$ (respectivement $b_2$) la partie imaginaire de $\nu_1^l$ (respectivement $\nu_2^l$). En identifiant les coefficients du polynôme $R_l = \tau^2(\nu - \nu_1^l)(\nu - \overline{\nu}_1^l)(\nu - \nu_2^l)(\nu - \overline{\nu}_2^l)$, on obtient les relations :

$$a_1 + a_2 = 1, \tag{8.7}$$

$$|\nu_1^l|^2 + |\nu_2^l|^2 + 4a_1a_2 = 1 + \frac{V_l^2}{\tau^2}, \tag{8.8}$$

$$a_1|\nu_2^l|^2 + a_2|\nu_1^l|^2 = K_y^2\frac{V_l^2}{\tau^2}, \tag{8.9}$$

$$|\nu_1^l\nu_2^l|^2 = K_y^2\frac{V_l^2}{\tau^2}. \tag{8.10}$$

En injectant (8.7) dans (8.8), on a :

$$u := |\nu_1^l|^2 + |\nu_2^l|^2 - \frac{V_l^2}{\tau^2} = (2a_1-1)^2 \geq 0. \tag{8.11}$$

On va se ramener à l'étude d'un polynôme de degré 3 en $u$. On a $u \geq 0$ donc $4a_1a_2 - 1 \leq 0$. Par conséquent, on a, grâce à (8.7),

$$4a_1a_2 - 1 = (2a_1-1)(2a_2-1) \leq 0.$$

Quitte à changer $\nu_1$ en $\nu_2$, cela nous permet de supposer que l'on a $1-2a_1 \geq 0$ et par conséquent $\sqrt{u} = 1-2a_1$. On introduit alors la somme et la différence des $|\nu_j^l|^2$ :

$$\begin{aligned}
S &= |\nu_1^l|^2 + |\nu_2^l|^2 = u + \frac{V_l^2}{\tau^2},\\
D &= |\nu_1^l|^2 - |\nu_2^l|^2,
\end{aligned}$$

de sorte que $|\nu_1^l|^2 = \dfrac{S+D}{2}$ et $|\nu_2^l|^2 = \dfrac{S-D}{2}$. À l'aide de ces deux relations, (8.9) s'écrit

$$a_1 \frac{S-D}{2} + a_2 \frac{S+D}{2} = K_y^2 \frac{V_l^2}{\tau^2}, \tag{8.12}$$

et (8.10) devient

$$S^2 - D^2 = 4K_y^2 \frac{V_l^2}{\tau^2}. \tag{8.13}$$

À l'aide de (8.12), cela nous permet d'exprimer $D$ en fonction de $u$ :

$$D = \frac{2}{1-2a_1}\left(K_y^2 \frac{V_l^2}{\tau^2} - \frac{S}{2}\right) = \frac{2K_y^2 \dfrac{V_l^2}{\tau^2} - u - \dfrac{V_l^2}{\tau^2}}{\sqrt{u}}.$$

La relation (8.13) nous donne alors :

$$u^2 + 2u\frac{V_l^2}{\tau^2} + \frac{V_l^4}{\tau^4} - 4K_y^4 \frac{V_l^4}{u\tau^4} - u - \frac{V_l^4}{u\tau^4} + 4K_y^2 \frac{V_l^4}{u\tau^4} - 2\frac{V_l^2}{\tau^2} = 0,$$

*i.e.*

$$u^2 + \frac{2V_l^2 - \tau^2}{\tau^2} u + \frac{V_l^2}{\tau^4}(V_l^2 - 2\tau^2) - \frac{V_l^4}{u\tau^4}(1-2K_y^2)^2.$$

Autrement dit, $u$ est une racine positive du polynôme $S$ défini par (8.6). Le lemme 8.4.3 nous permet alors d'affirmer que $u$ appartient à $[0,1]$. Comme $u = (2a_1-1)^2 = (2a_2-1)^2$, cela entraîne $a_2 \leq 1$. Par conséquent, on a :

$$a_1 \in [0, \frac{1}{2}] \qquad \text{et} \qquad a_2 \in [\frac{1}{2}, 1],$$

ce qui prouve la proposition puisque, pour tout $j$ dans $\{1..4\}$, $\omega_j^l = id\nu_j^l$. □

On peut alors énoncer un résultat de stabilité pour le modèle considéré.

**Proposition 8.4.5** *Le système PML (8.2) est stable et on a*

$$\forall \omega \,/\, P(\omega) = 0,\ 0 \leq \mathcal{I}m\,\omega \leq d.$$

**Preuve**. Cela résulte directement des propositions 1.2.8 et 8.4.4 puisque les racines de $P$ sont $0$, $id$, $\{\omega_j^p\}_{j=1..4}$ et $\{\omega_j^s\}_{j=1..4}$. □

## 8.5 Modèle discret

On utilise maintenant le schéma aux différences finies en quinconce introduit par Madriaga [100] et Virieux [130] pour la discrétisation en espace du modèle précédent. En éliminant la variable temps, le modèle discret s'écrit :

$$\begin{cases} (v_x)_{l,j} = (v_x^x)_{l,j} + (v_x^y)_{l,j}, \\ (i\omega + d_l)(v_x^x)_{l,j} = \dfrac{(\sigma_{xx})_{l+\frac{1}{2},j} - (\sigma_{xx})_{l-\frac{1}{2},j}}{\rho h}, \\ i\omega(v_x^y)_{l,j} = \dfrac{(\sigma_{xy})_{l,j+\frac{1}{2}} - (\sigma_{xy})_{l,j-\frac{1}{2}}}{\rho h}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (v_y^x)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (v_y^y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ (i\omega + d_{l+\frac{1}{2}})(v_y^x)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \dfrac{(\sigma_{xy})_{l+1,j+\frac{1}{2}} - (\sigma_{xy})_{l,j+\frac{1}{2}}}{\rho h}, \\ i\omega(v_y^y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \dfrac{(\sigma_{yy})_{l+\frac{1}{2},j+1} - (\sigma_{yy})_{l+\frac{1}{2},j}}{\rho h}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_{xx})_{l+\frac{1}{2},j} = (\sigma_{xx}^x)_{l+\frac{1}{2},j} + (\sigma_{xx}^y)_{l+\frac{1}{2},j}, \\ (i\omega + d_{l+\frac{1}{2}})(\sigma_{xx}^x)_{l+\frac{1}{2},j} = (\lambda + 2\mu)\dfrac{(v_x)_{l+1,j} - (v_x)_{l,j}}{h}, \\ i\omega(\sigma_{xx}^y)_{l+\frac{1}{2},j} = \lambda\dfrac{(v_y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_y)_{l+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_{yy})_{l+\frac{1}{2},j} = (\sigma_{yy}^x)_{l+\frac{1}{2},j} + (\sigma_{yy}^y)_{l+\frac{1}{2},j}, \\ (i\omega + d_{l+\frac{1}{2}})(\sigma_{yy}^x)_{l+\frac{1}{2},j} = \lambda\dfrac{(v_x)_{l+1,j} - (v_x)_{l,j}}{h}, \\ i\omega(\sigma_{yy}^y)_{l+\frac{1}{2},j} = (\lambda + 2\mu)\dfrac{(v_y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_y)_{l+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_{xy})_{l,j+\frac{1}{2}} = (\sigma_{xy}^x)_{l,j+\frac{1}{2}} + (\sigma_{xy}^y)_{l,j+\frac{1}{2}}, \\ (i\omega + d_l)(\sigma_{xy}^x)_{l,j+\frac{1}{2}} = \mu\dfrac{(v_y)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_y)_{l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h}, \\ i\omega(\sigma_{xy}^y)_{l,j+\frac{1}{2}} = \mu\dfrac{(v_x)_{l,j+1} - (v_x)_{l,j}}{h}. \end{cases}$$

Le paramètre $h$ désigne le pas de discrétisation, que l'on choisit identique dans les deux directions de l'espace ($h = \Delta x = \Delta y$).

## 8.6 Calcul des coefficients de réflexion

Afin d'analyser l'influence de la couche absorbante et dans le but d'optimiser éventuellement son action, on va associer au modèle PML des coefficients de réflexion discrets. Le calcul d'un coefficient de réflexion repose sur une analyse du modèle par ondes planes, ce qui revient à chercher des solutions particulières du modèle discret sous la forme :

$$(V^\alpha)_{l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\hat{V}^\alpha)_{l+\frac{1}{2}} \exp[-ik_y(j+\frac{1}{2})h + i\omega t], \tag{8.14}$$

avec

$$V^\alpha = \begin{bmatrix} v_x^\alpha \\ v_y^\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha = x, y \quad \text{et} \quad (\hat{V})_{l+\frac{1}{2}} = (\hat{V}^x)_{l+\frac{1}{2}} + (\hat{V}^y)_{l+\frac{1}{2}}.$$

Après avoir éliminé $\sigma$ du schéma discret, on injecte les expressions (8.14) dans les équations obtenues. On obtient successivement :

$(i)$ pour $v_x$ :

$$\begin{aligned}(\hat{v}_x)_l = {} & \frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2(i\omega + d_l)} \left( \frac{(\hat{v}_x)_{l+1} - (\hat{v}_x)_l}{i\omega + d_{l+\frac{1}{2}}} - \frac{(\hat{v}_x)_l - (\hat{v}_x)_{l-1}}{i\omega + d_{l-\frac{1}{2}}} \right) \\ & + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2}) \frac{\mu}{\rho\omega^2 h^2} (\hat{v}_x)_l + 2\sin(\frac{k_y h}{2}) \frac{\lambda+\mu}{\omega\rho h^2(i\omega + d_l)} \left( (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} \right),\end{aligned} \tag{8.15}$$

$(ii)$ pour $v_y$ :

$$\begin{aligned}(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} = {} & \frac{\mu}{\rho h^2(i\omega + d_{l+\frac{1}{2}})} \left( \frac{(\hat{v}_y)_{l+\frac{3}{2}} - (\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}}}{i\omega + d_{l+1}} - \frac{(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}}{i\omega + d_l} \right) \\ & + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2}) \frac{\lambda+2\mu}{\rho\omega^2 h^2} (\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} + 2\sin(\frac{k_y h}{2}) \frac{\lambda+\mu}{\omega\rho h^2(i\omega + d_{l+\frac{1}{2}})} \left( (\hat{v}_x)_l - (\hat{v}_x)_{l+1} \right).\end{aligned} \tag{8.16}$$

On cherche ensuite des solutions particulières de (8.15) et (8.16) de la forme :

- Ondes $P$ (compression) :

$$\begin{cases} (\hat{V})_q = \vec{d_p} e^{-ik_x qh} + R_{pp} \vec{d_p^r} e^{ik_x qh} + R_{ps} \vec{d_s^r} e^{ik_x qh} & \text{pour } q = l, l+\frac{1}{2} \leq 0, \\ (\hat{V})_q = T_{pp} \vec{d_p^t} e^{-i\tilde{k}_x qh} + T_{ps} \vec{d_s^t} e^{-i\tilde{k}_x qh} & \text{pour } q = l, l+\frac{1}{2} \geq 0, \end{cases} \tag{8.17}$$

avec

$$\vec{d_p} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{d_p^r} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{d_s^r} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{d_p^t} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d_s^t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_4 \\ \cos\theta_4 \end{bmatrix},$$

– Ondes $S$ (cisaillement) :

$$\begin{cases} (\hat{V})_q = \vec{d_s} e^{-ik_x qh} + R_{ss}\vec{d_s^r} e^{ik_x qh} + R_{sp}\vec{d_p^r} e^{ik_x qh} & \text{pour } q = l, l+\frac{1}{2} \leq 0, \\ (\hat{V})_q = T_{ss}\vec{d_s^t} e^{-i\tilde{k}_x qh} + T_{sp}\vec{d_p^t} e^{-i\tilde{k}_x qh} & \text{pour } q = l, l+\frac{1}{2} \geq 0. \end{cases} \tag{8.18}$$

avec

$$\vec{d_s} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{d_s^r} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{d_p^r} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{d_s^t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d_p^t} = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ -\sin\theta_4 \end{bmatrix}.$$

Notons que la couche absorbante est localisée en $q = 0$.
Dans chacun des deux cas, on vérifie facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall q = l, l+\frac{1}{2} \leq -1 \qquad (\hat{V})_{q+1} - 2(\hat{V})_q + (\hat{V})_{q-1} = -4\sin^2(\frac{k_x h}{2})(\hat{V})_q, \\ &\forall q = l, l+\frac{1}{2} \geq 1 \qquad (\hat{V})_{q+1} - 2(\hat{V})_q + (\hat{V})_{q-1} = -4\sin^2(\frac{\tilde{k}_x h}{2})(\hat{V})_q. \end{aligned}$$

### 8.6.1 Relation de dispersion dans le milieu physique

On cherche maintenant à établir la relation de dispersion vérifiée par $(k_x, k_y)$ dans le milieu physique, ce qui correspond au cas $l \leq -1$. Dans ce cas, les équations (8.15) et (8.16) se réduisent à :

$$\begin{aligned} (\hat{v}_x)_l = &-\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - 2(\hat{v}_x)_l + (\hat{v}_x)_{l-1}\Big] + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2})\frac{\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_x)_l \\ &+ 2i\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} = &-\frac{\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{3}{2}} - 2(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} + (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big] + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} \\ &+ 2i\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - (\hat{v}_x)_l\Big]. \end{aligned}$$

En considérant que l'onde est de la forme (8.17) ou (8.18), on obtient les relations :

$$(\hat{v}_x)_l = \frac{4}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\lambda+2\mu)\sin^2(\frac{k_xh}{2}) + \mu\sin^2(\frac{k_yh}{2})\Big](\hat{v}_x)_l \\ + 2i\sin(\frac{k_yh}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big], \tag{8.19}$$

$$(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\rho h^2\omega^2}\Big[\mu\sin^2(\frac{k_xh}{2}) + (\lambda+2\mu)\sin^2(\frac{k_yh}{2})\Big](\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} \\ + 2i\sin(\frac{k_yh}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - (\hat{v}_x)_l\Big]. \tag{8.20}$$

On exprime alors $(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}$ à l'aide de (8.20) et on remplace cette quantité dans (8.19) ; on obtient :

$$(\hat{v}_x)_l = \Big[A - 4\frac{B^2}{1-C}\sin^2(\frac{k_xh}{2})\Big](\hat{v}_x)_l,$$

avec

$$A = \frac{4}{\rho h^2\omega^2}\Big[(\lambda+2\mu)\sin^2(\frac{k_xh}{2}) + \mu\sin^2(\frac{k_yh}{2})\Big], \quad B = 2i\sin(\frac{k_yh}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega^2}$$
$$\text{et} \quad C = \frac{4}{\rho h^2\omega^2}\Big[\mu\sin^2(\frac{k_xh}{2}) + (\lambda+2\mu)\sin^2(\frac{k_yh}{2})\Big].$$

On en déduit la relation de dispersion satisfaite par $k_x$ et $k_y$ dans le milieu physique :

$$A + C - AC - 4B^2\sin^2(\frac{k_xh}{2}) - 1 = 0.$$

Étant donné que $V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, cette relation s'écrit :

$$-\frac{16}{h^4\omega^4}V_p^2V_s^2\,(A_x+A_y)^2 + \frac{4}{h^2\omega^2}(V_p^2+V_s^2)\,(A_x+A_y) = 1, \tag{8.21}$$

avec $A_x = \sin^2(\frac{k_xh}{2})$ et $A_y = \sin^2(\frac{k_yh}{2})$.

En posant $X = \dfrac{A_x+A_y}{h^2\omega^2}$, on a encore

$$16V_p^2V_s^2X^2 - 4(V_p^2+V_s^2)X + 1 = 0,$$

d'où

$$X = 4V_p^2 \quad \text{ou} \quad X = 4V_s^2,$$

*i.e.*

$$A_x + A_y = 4h^2\omega^2V_p^2 \quad \text{ou} \quad A_x + A_y = 4h^2\omega^2V_s^2.$$

### 8.6.2 Relation de dispersion dans une couche absorbante infinie

Le cas d'une couche absorbante infinie correspond au modèle PML discret avec :

$$d_l = d \text{ si } l > 0, \qquad d_l = 0 \text{ si } l \leq 0,$$
$$d_{l+\frac{1}{2}} = d \text{ si } l \geq 0, \qquad d_{l+\frac{1}{2}} = 0 \text{ si } l < 0.$$

Pour $l \geq 1$, les équations (8.15) et (8.16) s'écrivent :

$$\begin{aligned}(\hat{v}_x)_l = \frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2(i\omega+d)^2}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - 2(\hat{v}_x)_l + (\hat{v}_x)_{l-1}\Big] + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2})\frac{\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_x)_l \\ - 2\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega(i\omega+d)}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{\rho h^2(i\omega+d)^2}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{3}{2}} - 2(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} + (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big] + 4\sin^2(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+2\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} \\ - 2\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega(i\omega+d)}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - (\hat{v}_x)_l\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{v}_x)_l = \frac{4}{\rho h^2}\Big[-\frac{\lambda+2\mu}{(i\omega+d)^2}\tilde{A}_x + \frac{\mu}{\omega^2}A_y\Big](\hat{v}_x)_l \\ - 2\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega(i\omega+d)}\Big[(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\rho h^2}\Big[-\frac{\mu}{(i\omega+d)^2}\tilde{A}_x + \frac{\lambda+2\mu}{\omega^2}A_y\Big](\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}} \\ - 2\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\rho h^2\omega(i\omega+d)}\Big[(\hat{v}_x)_{l+1} - (\hat{v}_x)_l\Big],\end{aligned}$$

avec $\tilde{A}_x = \sin^2(\frac{\tilde{k}_x h}{2})$. Le raisonnement utilisé dans le paragraphe précédent nous donne la relation de dispersion dans la PML :

$$\begin{aligned}4\frac{\lambda+3\mu}{\rho h^2}\Big[-\frac{\tilde{A}_x}{(i\omega+d)^2} + \frac{A_y}{\omega^2}\Big] - \frac{16}{\rho^2 h^4}\Big\{(\lambda+2\mu)\mu\big[\frac{\tilde{A}_x^2}{(i\omega+d)^4} + \frac{A_y^2}{\omega^4}\big] \\ - \big[(\lambda+2\mu)^2+\mu^2\big]\frac{\tilde{A}_x A_y}{\omega^2(i\omega+d)^2}\Big\} - 16\frac{(\lambda+\mu)^2}{\rho^2 h^4\omega^2(i\omega+d)^2}\tilde{A}_x A_y - 1 = 0.\end{aligned}$$

**Remarque 8.6.1** *On peut aussi déduire directement cette relation du système précédent.*

En introduisant le paramètre complexe $D := 1 - i\dfrac{d}{\omega}$, il vient :

$$-\frac{16}{h^4\omega^4}V_p^2V_s^2\left(\frac{\tilde{A}_x}{D^2} + A_y\right)^2 + \frac{4}{h^2\omega^2}(V_p^2+V_s^2)\left(\frac{\tilde{A}_x}{D^2} + A_y\right) = 1. \tag{8.22}$$

Comme plus haut, on obtient :

$$\frac{\tilde{A}_x}{D^2} + A_y = 4h^2\omega^2 V_p^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\tilde{A}_x}{D^2} + A_y = 4h^2\omega^2 V_s^2.$$

### 8.6.3 Coefficients de réflexion pour une couche absorbante infinie

Poursuivons notre analyse en déterminant les coefficients de réflexion associés à la couche absorbante infinie. Notons tout d'abord que (8.17) et (8.18) induisent des relations de continuité, obtenues en raccordant les champs de vitesse en $q = 0$. Ainsi, dans le cas d'une onde $P$, on dispose de la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{pp}\cos\theta_3 - T_{ps}\sin\theta_4 = \cos\theta - R_{pp}\cos\theta - R_{ps}\sin\theta_2 \\ \\ T_{pp}\sin\theta_3 + T_{ps}\cos\theta_4 = \sin\theta + R_{pp}\sin\theta + R_{ps}\cos\theta_2 \end{array} \right. \tag{8.23}$$

et dans le cas d'une onde $S$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_{ss}\sin\theta_3 + T_{sp}\cos\theta_4 = -\sin\theta + R_{ss}\sin\theta + R_{sp}\cos\theta_2 \\ \\ T_{ss}\cos\theta_3 - T_{sp}\sin\theta_4 = \cos\theta + R_{ss}\cos\theta + R_{sp}\sin\theta_2. \end{array} \right. \tag{8.24}$$

On considère alors les équations (8.15) et (8.16) pour $l = 0$ et $l + \frac{1}{2} = 0$ respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{v}_x)_0 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2 i\omega}\left[\dfrac{(\hat{v}_x)_1 - (\hat{v}_x)_0}{i\omega + d}\right] + \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2\omega^2}\left[(\hat{v}_x)_0 - (\hat{v}_x)_{-1}\right] \\ \qquad\qquad + 4\sin^2(\dfrac{k_y h}{2})\dfrac{\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_x)_0 - 2i\sin(\dfrac{k_y h}{2})\dfrac{\lambda + \mu}{\rho h^2\omega^2}\left[(\hat{v}_y)_{-\frac{1}{2}} - (\hat{v}_y)_{\frac{1}{2}}\right], \\ \\ (\hat{v}_y)_0 = \dfrac{\mu}{\rho h^2 i\omega}\left[\dfrac{(\hat{v}_y)_1 - (\hat{v}_y)_0}{i\omega + d}\right] + \dfrac{\mu}{\rho h^2\omega^2}\left[(\hat{v}_y)_0 - (\hat{v}_y)_{-1}\right] \\ \qquad\qquad + 4\sin^2(\dfrac{k_y h}{2})\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho h^2\omega^2}(\hat{v}_x)_0 - 2i\sin(\dfrac{k_y h}{2})\dfrac{\lambda + \mu}{\rho h^2\omega^2}\left[(\hat{v}_x)_{-\frac{1}{2}} - (\hat{v}_x)_{\frac{1}{2}}\right]. \end{array} \right. \tag{8.25}$$

On applique ensuite (8.25) au cas d'une onde $P$ et on fait apparaître les termes $T_{pp}\cos\theta_3 - T_{ps}\sin\theta_4$ et $T_{pp}\sin\theta_3 + T_{ps}\cos\theta_4$ que l'on élimine à l'aide de (8.23). Tous les termes de transmission sont ainsi écartés et on est ramené à résoudre le système en $(R_{pp}, R_{ps})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (M\cos\theta + N\sin\theta)R_{pp} + (M\sin\theta_2 + N\cos\theta_2)R_{ps} = M'\cos\theta + N'\sin\theta \\ \\ (-N\cos\theta + P\sin\theta)R_{pp} + (-N\sin\theta_2 + P\cos\theta_2)R_{ps} = P'\sin\theta + N'\cos\theta \end{array} \right.$$

avec :

$$M = (\lambda+2\mu)\left(\frac{2\sin(\tilde{k}_x\frac{h}{2})\exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2})}{\rho\omega h^2(iw+d_{\frac{1}{2}})} - \frac{2i\sin(k_x\frac{h}{2})\exp(-ik_x\frac{h}{2})}{\rho h^2\omega^2}\right) - \frac{4\mu\sin^2(\frac{k_y h}{2})}{\rho h^2\omega^2} + 1,$$

$$N = 2i\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{(\lambda+\mu)}{\rho h^2\omega^2}\left(\exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2}) - \exp(-ik_x\frac{h}{2})\right),$$

$$P = -\mu\left(\frac{2\sin(\tilde{k}_x\frac{h}{2})\exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2})}{\rho\omega h^2(iw+d_{\frac{1}{2}})} - \frac{2i\sin(k_x\frac{h}{2})\exp(-ik_x\frac{h}{2})}{\rho h^2\omega^2}\right) + 4(\lambda+2\mu)\frac{\sin^2(\frac{k_y h}{2})}{\rho^2 h^2\omega^2} - 1,$$

$$M' = (\lambda+2\mu)\left(\frac{2\sin(\tilde{k}_x\frac{h}{2})\exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2})}{\rho\omega h^2(iw+d_{\frac{1}{2}})} + \frac{2i\sin(k_x\frac{h}{2})\exp(ik_x\frac{h}{2})}{\rho h^2\omega^2}\right) - \frac{4\mu\sin^2(\frac{k_y h}{2})}{\rho h^2\omega^2} + 1,$$

$$N' = 2i\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{(\lambda+\mu)}{\rho h^2\omega^2}\left(\exp(ik_x\frac{h}{2}) - \exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\right),$$

$$P' = \mu\left(\frac{2\sin(\tilde{k}_x\frac{h}{2})\exp(-i\tilde{k}_x\frac{h}{2})}{\rho\omega h^2(iw+d_{\frac{1}{2}})} + \frac{2i\sin(k_x\frac{h}{2})\exp(ik_x\frac{h}{2})}{\rho h^2\omega^2}\right) - 4(\lambda+2\mu)\frac{\sin^2(\frac{k_y h}{2})}{\rho^2 h^2\omega^2} + 1.$$

On en déduit les coefficients de réflexion :

$$\begin{aligned} R_{pp} = \Big((MP+N^2)\cos(\theta+\theta_2)\Big)^{-1}\Big[&(M'P-NN')\cos\theta\cos\theta_2 \\ &- (NN'+MP')\sin\theta\sin\theta_2 - (MN'+M'N)\cos\theta\sin\theta_2 + (PN'-NP')\sin\theta\cos\theta_2\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{ps} = \Big((MP+N^2)\cos(\theta+\theta_2)\Big)^{-1}\Big[&(MP'+2NN'-M'P)\cos\theta\sin\theta \\ &+ (MN'+M'N)\cos^2\theta + (NP'-N'P)\sin^2\theta\Big]. \end{aligned}$$

On procède de la même manière dans le cas d'une onde $S$, en éliminant les termes de transmission dans (8.25) grâce à (8.24). On est alors conduit à la résolution du système :

$$\begin{cases} (-M\sin\theta+N\cos\theta)R_{ss} + (-M\cos\theta_2+N\sin\theta_2)R_{sp} = -M'\sin\theta+N'\cos\theta \\ (N\sin\theta+P\cos\theta)R_{ss} + (N\cos\theta_2+P\sin\theta_2)R_{sp} = P'\cos\theta-N'\sin\theta \end{cases}$$

On obtient :

$$R_{ss} = \Big((MP+N^2)\cos(\theta+\theta_2)\Big)^{-1}\Big[(NN'+MP')\cos\theta\cos\theta_2$$
$$+(NN'-M'P)\sin\theta\sin\theta_2-(MN'+M'N)\sin\theta\cos\theta_2+(PN'-NP')\cos\theta\sin\theta_2\Big],$$

$$R_{sp} = \Big((MP+N^2)\cos(\theta+\theta_2)\Big)^{-1}\Big[(M'P-2NN'-MP')\cos\theta\sin\theta$$
$$+(MN'+M'N)\sin^2\theta+(NP'-PN')\cos^2\theta\Big].$$

### 8.6.4 Coefficients de réflexion pour une couche absorbante de longueur finie

Une couche de longueur finie est caractérisée par :

$$(d_{\frac{1}{2}},\ldots,d_{n_l-\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad (d_1,\ldots,d_{n_l}),$$

où $n_l$ représente le nombre de points de discrétisation dans la couche selon la direction $x$ ; l'épaisseur de la couche est donnée par $h\times n_l$. Afin de terminer la couche, on impose des conditions de Dirichlet homogènes à sa base : $(\hat{v}_x)_{n_l} = (\hat{v}_y)_{n_l+\frac{1}{2}} = 0$. En posant

$$\begin{aligned}
a_l &= (i\omega+d_{l-1})(h^2-4\frac{\mu}{\rho\omega^2}\sin^2(\frac{k_y h}{2}))-(b_l+b_{l-1}),\\
b_l &= -\frac{\lambda+2\mu}{\rho(i\omega+d_{l-\frac{1}{2}})},\\
\alpha &= 2\sin(\frac{k_y h}{2})\frac{\lambda+\mu}{\omega\rho},
\end{aligned}$$

la relation (8.15) s'écrit :

$$a_{l+1}(\hat{v}_x)_l+b_{l+1}(\hat{v}_x)_{l+1}+b_l(\hat{v}_x)_{l-1}-\alpha(\hat{v}_y)_{l-\frac{1}{2}}+\alpha(\hat{v}_y)_{l+\frac{1}{2}}=0.$$

On a donc :

$$\mathcal{M}V_x+\mathcal{A}V_y=\left(\frac{\lambda+2\mu}{i\omega\rho}(\hat{v}_x)_{-1}+\alpha(\hat{v}_y)_{-\frac{1}{2}}\right)F, \tag{8.26}$$

avec

$$
\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b_{n_l-1} \\ 0 & & 0 & b_{n_l-1} & a_{n_l} \end{bmatrix}, \tag{8.27}
$$

$$
V_x = \begin{bmatrix} (\hat{v}_x)_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (\hat{v}_x)_{n_l-1} \end{bmatrix}, \qquad V_y = \begin{bmatrix} (\hat{v}_y)_{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ (\hat{v}_y)_{n_l-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & & 0 \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

De même, en introduisant

$$
\begin{aligned}
c_l &= (i\omega + d_{l-\frac{1}{2}})(h^2 - 4\frac{\lambda+2\mu}{\rho\omega^2}\sin^2(\frac{k_y h}{2})) - (e_l + e_{l-1}), \\
e_l &= -\frac{\mu}{\rho(i\omega + d_l)},
\end{aligned}
$$

on a :

$$
\mathcal{N}V_y + \mathcal{B}V_x = \frac{\mu}{i\omega\rho}(\hat{v}_y)_{-\frac{1}{2}}F, \tag{8.28}
$$

avec $\mathcal{B} = -\,{}^t\mathcal{A}$ et

$$
\mathcal{N} = \begin{bmatrix} c_1 & e_1 & 0 & & 0 \\ e_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & e_{n_l-1} \\ 0 & & 0 & e_{n_l-1} & c_{n_l} \end{bmatrix}. \tag{8.29}
$$

Le système composé de (8.26) et (8.28) s'écrit :

$$
\begin{cases} \mathcal{M}V_x + \mathcal{A}V_y = \gamma F \\ \\ \mathcal{N}V_y + \mathcal{B}V_x = \delta F \end{cases} \tag{8.30}
$$

avec $\gamma = \dfrac{\lambda+2\mu}{i\omega\rho}(\hat{v}_x)_{-1} + \alpha(\hat{v}_y)_{-\frac{1}{2}}$ et $\delta = \dfrac{\mu}{i\omega\rho}(\hat{v}_y)_{-\frac{1}{2}}$.

On déduit alors de (8.30) que $V_x$ et $V_y$ sont solution de :

$$\left\{\begin{aligned} &(I-\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B})V_x = \gamma\mathcal{M}^{-1}F - \delta\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1}F,\\ &(I-\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A})V_y = \delta\mathcal{N}^{-1}F - \gamma\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}F. \end{aligned}\right. \tag{8.31}$$

Nous avons introduit les inverses des matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sans avoir établi leur existence. On montre que, sous certaines conditions sur $(d_{n_l}, d_{n_l-\frac{1}{2}})$ et pour $h$ assez petit, ces deux matrices sont inversibles. Sous ces mêmes hypothèses, les matrices

$$\mathcal{K} := I-\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} := I-\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A} \tag{8.32}$$

sont aussi inversibles. Pour ne pas alourdir la rédaction, nous ne développons pas ici les démonstrations. Nous renvoyons au paragraphe 8.6.5 pour une preuve de ces résultats. Ces conditions étant satisfaites, le système (8.31) est équivalent à :

$$\left\{\begin{aligned} &V_x = \gamma\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}F - \delta\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1}F,\\ &V_y = \delta\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}F - \gamma\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}F. \end{aligned}\right.$$

Ce système nous donne directement :

$$\left\{\begin{aligned} &(\hat{v}_x)_0 = {}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F,\\ &(\hat{v}_y)_{\frac{1}{2}} = {}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F. \end{aligned}\right. \tag{8.33}$$

Les expressions (8.33) vont maintenant nous permettre de déterminer les coefficients de réflexion pour chaque type d'onde. Dans le cas d'une onde $P$, (8.33) s'écrit sous la forme du système

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\theta - R_{pp}\cos\theta - R_{ps}\sin\theta_2 = {}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F\\ &(T_{pp}\sin\theta_3 + T_{ps}\cos\theta_4)\exp(-i\tilde{k}_x\tfrac{h}{2}) = {}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F \end{aligned}\right.$$

dans lequel on injecte la relation de continuité (8.23). Les coefficients de réflexion $R_{pp}$ et $R_{ps}$ sont ainsi solution de :

$$\left\{\begin{aligned} &R_{pp}\cos\theta + R_{ps}\sin\theta_2 = \cos\theta + {}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1} - \gamma I)F\\ &R_{pp}\sin\theta + R_{ps}\cos\theta_2 = -\sin\theta + \exp(i\tilde{k}_x\tfrac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F, \end{aligned}\right.$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} R_{pp} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[&\cos(\theta-\theta_2) + \cos\theta_2\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1} - \gamma I)F\\ &+\sin\theta_2\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1} - \delta I)F\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{ps} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[&-\sin 2\theta + \cos\theta\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^t\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F\\ &+\sin\theta\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F\Big]. \end{aligned}$$

De la même manière, pour une onde incidente $S$, on écrit (8.33) en tenant compte de (8.24), ce qui donne :

$$\begin{cases} R_{ss}\sin\theta + R_{sp}\cos\theta_2 = \sin\theta + {}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F \\ R_{ss}\cos\theta + R_{sp}\sin\theta_2 = -\cos\theta + \exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F. \end{cases}$$

On obtient les coefficients de réflexion numériques :

$$R_{ss} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[-\cos(\theta-\theta_2) + \cos\theta_2\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I - \gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1})F$$
$$+\sin\theta_2\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1} - \gamma I)F\Big],$$

$$R_{sp} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[\sin 2\theta + \cos\theta\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F$$
$$+\sin\theta\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\gamma\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1} - \delta I)F\Big].$$

**Remarque 8.6.2** *Comme $\mathcal{B} = -{}^t\mathcal{A}$ les formules précédentes s'écrivent aussi :*

$$\begin{cases} R_{pp} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[\cos(\theta-\theta_2) + \cos\theta_2\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1} - \gamma I)F \\ \quad -\sin\theta_2\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\gamma\,{}^t\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1} + \delta I)F\Big], \\ R_{ps} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[-\sin 2\theta + \cos\theta\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^t\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I + \gamma\,{}^t\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1})F \\ \quad +\sin\theta\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F\Big], \\ R_{ss} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[-\cos(\theta-\theta_2) + \cos\theta_2\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\delta I + \gamma\,{}^t\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1})F \\ \quad +\sin\theta_2\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1} - \gamma I)F\Big], \\ R_{sp} = \cos(\theta+\theta_2)^{-1}\Big[\sin 2\theta + \cos\theta\,{}^tF\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}^{-1}(\gamma I - \delta\mathcal{A}\mathcal{N}^{-1})F \\ \quad -\sin\theta\exp(i\tilde{k}_x\frac{h}{2})\,{}^tF\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}^{-1}(\gamma\,{}^t\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1} + \delta I)F\Big]. \end{cases} \tag{8.34}$$

### 8.6.5 Complément : inversibilité des matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$

Nous terminons cette partie en démontrant, sous certaines conditions, l'inversibilité des matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ définies par (8.27), (8.29) et (8.32). Pour cela, nous allons utiliser le résultat établi au chapitre 1 (proposition 1.4.1) ainsi que des résultats classiques d'algèbre que nous rappelons ci-dessous [66]. On munit $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ d'une norme $N$ et on note $\mathcal{G}l_k(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrice inversibles de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.

**Proposition 8.6.3** *$\mathcal{G}l_k(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.*

**Remarque 8.6.4** *La proposition 8.6.3 n'est que l'application à la dimension finie d'un résultat plus général. En effet, l'ensemble des endomorphismes continus et inversibles d'un espace de Banach $E$ est un ouvert de l'algèbre $\mathcal{L}_c(E)$ des endomorphismes continus.*

**Lemme 8.6.5** *Soit $X = X(h)$ une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ dépendant continûment du paramètre réel $h$. On suppose que $X(0)$ est inversible. Alors, $X$ est inversible pour $h$ assez petit.*

**Preuve**. D'après la proposition 8.6.3, il existe $r > 0$ tel que $Y$ appartient à $\mathcal{G}l_k(\mathbb{C})$ pour $N(X(0) - Y) < r$. Mais, pour $h$ assez petit, on a $N(X(0) - X(h)) < r$. □

Les matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ dépendent continûment du paramètre $h \geq 0$. Nous allons établir que ces matrices sont inversibles pour $h = 0$, ce qui montrera, grâce au lemme 8.6.5, qu'elles le sont pour $h$ assez petit.

Nous supposons, dans un premier temps, que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont inversibles. Alors, les matrices $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ sont bien définies. Par ailleurs, comme $\mathcal{A}$ est la matrice nulle pour $h = 0$, on a : $\mathcal{K}(h = 0) = \mathcal{L}(h = 0) = I$ et ces deux matrices sont inversibles.

Il reste donc à prouver que, sous certaines conditions, les matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont inversibles pour $h = 0$. Nous traitons uniquement le cas de $\mathcal{M}$, le raisonnement étant le même pour la matrice $\mathcal{N}$. Nous avons :

$$\mathcal{M}(h=0) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b_{n_l-1} \\ 0 & & 0 & b_{n_l-1} & \tilde{a}_{n_l} \end{bmatrix}, \tag{8.35}$$

avec :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n_l\}, \qquad \tilde{a}_j = a_j(h=0) = -(b_j + b_{j-1}),$$
$$\forall j \in \{1, \cdots, n_l - 1\}, \quad b_j = -\frac{\lambda + 2\mu}{\rho(i\omega + d_{j-\frac{1}{2}})}.$$

Cette matrice étant de la forme (1.5), la proposition 1.4.1 montre que, si $\mathcal{M}$ est inversible, la matrice symétrique $\mathcal{M}^{-1}$ est donnée par :

$$(\mathcal{M}^{-1})_{ij} = -b_i \dots b_{j-1} \frac{\Sigma_{i-1}(b_0, \dots, b_{i-1})\Sigma_{n_l-j}(b_j, \dots, b_{n_l})}{\Sigma_{n_l}(b_0, \dots, b_{n_l})} \quad \text{si } i \leq j. \tag{8.36}$$

En particulier, si

$$\Sigma_{n_l}(b_0, \dots, b_{n_l}) \neq 0, \tag{8.37}$$

la matrice $\mathcal{M}$ est inversible et $\mathcal{M}^{-1}$ est donnée par (8.36). Montrons alors le lemme suivant.

**Lemme 8.6.6** $\Sigma_{n_l}(b_0,\ldots,b_{n_l})=0$ *si et seulement si* $d_{n_l-\frac{1}{2}}=\frac{(\lambda+2\mu)\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}{\rho\, b_0,\ldots,b_{n_l-1}}-i\omega$.

**Preuve**. Supposons que l'on ait $\Sigma_{n_l}(b_0,\ldots,b_{n_l})=0$. Comme

$$\Sigma_{n_l}(b_0,\ldots,b_{n_l})=b_{n_l}\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})+b_0\cdots b_{n_l-1},$$

on a alors

$$b_{n_l}\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})+b_0\cdots b_{n_l-1}=0.$$

Comme les $b_j$ sont tous non nuls, cela entraîne

$$\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})\neq 0,$$

donc

$$b_{n_l}=-\frac{b_0\cdots b_{n_l-1}}{\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}.$$

Comme, par définition, $b_{n_l}=-\frac{\lambda+2\mu}{\rho(i\omega+d_{n_l-\frac{1}{2}})}$, la relation précédente s'écrit aussi :

$$d_{n_l-\frac{1}{2}}=\frac{(\lambda+2\mu)\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}{\rho\, b_0,\ldots,b_{n_l-1}}-i\omega.$$

Réciproquement, si $d_{n_l-\frac{1}{2}}=\frac{(\lambda+2\mu)\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}{\rho\, b_0,\ldots,b_{n_l-1}}-i\omega$, on a :

$$\frac{1}{b_{n_l}}=\frac{\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}{b_0,\ldots,b_{n_l-1}},$$

donc $b_{n_l}\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})+b_0\cdots b_{n_l-1}=0$ *i.e.* $\Sigma_{n_l}(b_0,\ldots,b_{n_l})=0$. □

Maintenant, pour $(b_0,\ldots,b_{n_l-1})$ fixé, notons $s_{n_l}$ la quantité introduite au lemme 8.6.6 :

$$s_{n_l}=\frac{(\lambda+2\mu)\Sigma_{n_l-1}(b_0,\ldots,b_{n_l-1})}{\rho\, b_0,\ldots,b_{n_l-1}}-i\omega \tag{8.38}$$

Le lemme 8.6.6 montre donc que, si on choisit $d_{n_l-\frac{1}{2}}$ différent de $s_{n_l}$, on a $\Sigma_{n_l}(b_0,\ldots,b_{n_l})\neq 0$ et la matrice $\mathcal{M}(h=0)$ est inversible. Nous avons donc établi le résultat suivant.

**Proposition 8.6.7** *Soit* $(d_{\frac{1}{2}},\ldots,d_{n_l-\frac{3}{2}})$ *quelconque et* $d_{n_l-\frac{1}{2}}$ *différent de* $s_{n_l}$. *Alors, la matrice* $\mathcal{M}$ *est inversible pour* $h$ *assez petit.*

**Remarque 8.6.8** *On applique le même raisonnement à la matrice* $\mathcal{N}$ *: pour* $(d_1,\ldots,d_{n_l-1})$ *quelconque et* $d_{n_l}$ *différent d'une valeur* $t_{n_l}$ *(dépendant de* $(e_0,\ldots,e_{n_l-1})$*), la matrice* $\mathcal{N}$ *est inversible pour* $h$ *suffisamment proche de 0.*

## 8.7 Optimisation du comportement du modèle PML discret à incidence rasante

### 8.7.1 Problématique

Un problème récurrent dans le contexte de l'utilisation d'un modèle PML discret pour les équations de Maxwell ou pour l'équation de l'élastodynamique est le fait que le coefficient de réflexion n'est plus nul après discrétisation, mais surtout qu'il se dégrade à incidence rasante (voir par exemple [42]). Dans ce cas, une quantité non négligeable d'énergie est renvoyée dans le domaine de calcul sous forme d'ondes réfléchies parasites.

Pour étudier ce problème, Collino et Monk [42] ont calculé analytiquement le coefficient de réflexion numérique d'un schéma discret pour les équations de Maxwell (en l'occurrence pour une grille de différences finies en quinconce bidimensionnelle classique). Ensuite, ils ont sommé les valeurs de ce coefficient discret pour différents angles d'incidence (entre incidence normale et incidence rasante, c'est-à-dire pour 90 degrés, 89, 88, ..., 3, 2 et 1 degré). Enfin, ils ont utilisé un algorithme de moindres carrés pour optimiser le profil d'amortissement discret $d$ en chaque point de la grille de différences finies dans la PML afin de minimiser globalement la quantité d'énergie renvoyée dans le milieu. Cela revient à rendre le comportement du modèle PML discret moins bon à incidence proche de la normale (où il est presque parfait) dans le but de le rendre meilleur à incidence rasante (où il est mauvais).

Le but de notre calcul analytique ci-dessus (formules (8.34)) était le même : nous souhaitions utiliser ensuite une technique de moindres carrés afin de minimiser globalement l'énergie renvoyée dans le milieu sous forme d'ondes $P$ et/ou $S$ parasites, ceci pour toute la plage d'angles d'incidence possibles, en échantillonnant cette plage tous les degrés entre 1 et 90. Cependant, nous avons finalement abandonné cette approche pour les deux raisons que nous exposons maintenant.

Tout d'abord, la situation en élastodynamique est plus compliquée que pour les équations de Maxwell étudiées dans [42] car il existe deux types d'ondes de volume possibles (ondes $P$ de compression-dilatation et ondes $S$ de cisaillement). De ce fait, il y a quatre coefficients de réflexion discrets : $Rpp$, $Rps$, $Rsp$, et $Rss$. Il n'est alors pas facile de décider quel coefficient optimiser, ni de s'assurer que le fait d'en optimiser un ne va pas dégrader les autres. Il est difficile d'envisager d'optimiser les quatre simultanément car nous ne contrôlons pas la quantité d'énergie qui arrive sur le bord PML indépendamment sous forme d'ondes planes $P$ et d'ondes planes $S$. Nous pourrions songer à optimiser la moyenne arithmétique des quatre coefficients, mais cela n'est pas du tout réaliste d'un point de vue géophysique. En effet, le résultat d'une telle approche ne serait pas toujours optimal lorsque la source sismique et/ou le milieu varieraient puisque les différents types de failles pouvant générer des tremblements de terre n'émettent pas la même quantité d'énergie sous forme de compression et de cisaillement. Ces quantités varient en effet très fortement en fonction du diagramme de radiation de la source. Par ailleurs, la quantité d'énergie qui arrive au cours du temps sur le bord d'un milieu géophysique varie également en fonction de la nature du milieu géologique considéré, par exemple en fonction des contrastes de vitesses sismiques dans ce milieu. Enfin, dans le cas d'un milieu géophysique réaliste, c'est-à-dire possédant une surface libre, il existe un troisième type d'ondes, les ondes de surface (appelées ondes de Rayleigh ou de Love suivant leur polarisation) qui dans certains cas (par exemple en sismologie globale) transportent une grande quantité d'énergie. Ainsi, ces ondes devraient être également prises en compte dans le cadre d'un tel processus d'optimisation des coefficients du profil d'amortissement dans la

PML. Or, ces ondes ne sont pas incluses dans notre calcul des coefficients de réflexion de la partie 8.6.

Par ailleurs, au cours de notre travail sur le calcul analytique du coefficient de réflexion, nous avons découvert dans la littérature que, dans le cas des équations de Maxwell, une autre approche introduite par [91] et [114] existe et qu'elle semble très efficace. Il nous a donc paru tentant et intéressant d'essayer de l'adapter au cas de l'élastodynamique. Cette approche consiste à modifier la transformation de coordonnées complexe utilisée classiquement dans la PML (voir par exemple [43]) pour y introduire un terme dépendant de la fréquence qui implémente un filtre de type Butterworth dans la couche. Pour les ondes dont l'incidence est proche de la normale, la présence d'un tel filtre ne change rien, l'absorption étant déjà quasi parfaite. En revanche, pour les ondes rasantes, qui pour des raisons géométriques pénètrent peu en profondeur dans la PML mais qui y parcourent un trajet plus long dans la direction parallèle à celle-ci, le fait d'ajouter un tel filtre va atténuer fortement ces ondes et les empêcher de ressortir de la PML avec une énergie importante. Une telle approche a été introduite pour l'application des PML aux équations de Maxwell [91] et sa mise en œuvre a été rendue beaucoup plus directe dans le cas du schéma de différences finies de Yee [132] dans [114]. Une idée assez similaire a été utilisée très récemment en élastodynamique [57] dans le contexte d'une formulation variationnelle fondée sur la méthode des éléments spectraux.

À la lumière de ces travaux, nous avons donc décidé d'abandonner l'optimisation par moindres carrés de [42] et d'essayer plutôt de suivre l'approche de [114] en l'adaptant au cas des équations de l'élastodynamique écrites sous forme différentielle en vitesse et tenseur des contraines et discretisées par la méthode de différences finies en quinconce en espace et en temps de [100] et [130], schéma numérique qui est également utilisé dans le modèle PML *splitté* classique de [43].

À cet égard, nous présentons ci-dessous des résulats de cette nouvelle approche appelée *Convolution-PML* (C-PML) obtenus récemment en collaboration avec Dimitri Komatitsch et Roland Martin dans le cas bidimensionnel. La technique est fondée sur l'écriture du modèle PML sous forme de convolution en temps et l'introduction de variables à mémoire permet de ne pas avoir à stocker explicitement tout le passé de l'état du milieu pour pouvoir effectuer la convolution, mais plutôt de calculer celle-ci de manière récursive comme suggéré dans [97] et amélioré dans [114]. Notons que l'idée de variables à mémoire est assez similaire à celle utilisée en modélisation numérique en géophysique pour modéliser l'atténuation (viscoélasticité) dans l'équation des ondes sismiques (voir par exemple [134], [49] et [81]). Remarquons qu'à la différence du schéma classique de [43], cette approche présente l'avantage de ne pas être *splittée*, c'est-à-dire que son implémentation dans des codes de différences finies existants (sans PML) est beaucoup plus facile car la partie principale de ces codes reste inchangée. En effet, comme nous n'avons pas besoin de *splitter* les différentes inconnues $\mathbf{v}$ et $\sigma$, il n'y a pas à modifier la structure des boucles calculant ces tableaux. Il suffit d'ajouter un tableau pour stocker chacune de ces variables à mémoire (dans la PML seulement et pas dans le domaine de calcul lui-même où le coefficient d'amortissement est nul), et une boucle sur chacune des variables à mémoire, ce qui est aisé.

### 8.7.2 Présentation de la méthode C-PML

Comme nous l'avons détaillé en introduction de ce travail, la méthode PML peut être vue comme un changement de coordonnées (voir par exemple [42, 43]). Dans le cas d'une couche PML située suivant l'axe des $x$, on remplace $\partial_x$ par :

$$\partial_{\widetilde{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d_x}\partial_x,$$

où $d_x \geq 0$ représente le profil d'amortissement dans la couche PML. Autrement dit, on a :

$$\partial_{\widetilde{x}} = \frac{1}{s_x}\,\partial_x,$$

avec :

$$s_x = \frac{i\omega + d_x}{i\omega} = 1 + \frac{d_x}{i\omega}.$$

L'idée de la technique C-PML, introduite par [91] et reprise par [114], consiste simplement à faire un choix plus général pour $s_x$, en introduisant non seulement le profil d'amortissement $d_x$ mais aussi deux autres variables $\alpha_x \geq 0$ et $\kappa_x \geq 1$ telles que :

$$s_x = \kappa_x + \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega}.$$

Dans le cas particulier où $\kappa_x = 1$ et $\alpha_x = 0$, on retrouve la formulation PML classique. Comme le changement de coordonnées dépend de la fréquence, nous retrouvons, en repassant en temps, une convolution en temps sur chaque dérivée spatiale modifiée. En notant $\bar{s}_x(t)$ la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{s_x}$, $\partial_x$ est remplacé par [114] :

$$\partial_{\widetilde{x}} = \bar{s}_x(t) * \partial_x.$$

À l'aide du logiciel Maple, on obtient la valeur de $\bar{s}_x$ :

$$\bar{s}_x(t) = \frac{\delta(t)}{\kappa_x} - \frac{d_x}{\kappa_x^2}Y(t)e^{-(d_x/\kappa_x+\alpha_x)t},$$

où $\delta(t)$ et $Y$ désignent respectivement la distribution de Dirac et la fonction de Heaviside. Si nous notons :

$$\zeta_x(t) = -\frac{d_x}{\kappa_x^2}Y(t)e^{-(d_x/\kappa_x+\alpha_x)t}, \tag{8.39}$$

nous voyons que $\partial_x$ est finalement changé en :

$$\partial_{\widetilde{x}} = \frac{1}{\kappa_x}\partial_x + \zeta_x(t) * \partial_x.$$

Le premier de ces deux termes est facile à traiter dans un code numérique existant : il suffit de diviser la dérivée spatiale calculée par $\kappa_x$. Afin de pouvoir calculer le second terme dans le cadre d'un schéma discret en quinconce en temps, supposons que nous ayons discrétisé le temps en $N$ pas de temps de durée $\Delta t$. Le terme de convolution calculé au pas de temps $n$ peut alors s'écrire :

$$(\zeta_x * \partial_x)^n = \int_0^{n\Delta t} \partial_x(n\Delta t - \tau)\,\zeta_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Comme dans [97], nous supposons que $\partial_x$ varie peu au cours d'un même pas de temps et peut donc y être considéré comme constant en première approximation. D'un point de vue physique, cette hypothèse est justifiée car le pas de temps est petit devant la durée caractéristique des phénomenes mis en jeu. Sachant que les conditions initiales sont nulles, nous avons alors :

$$(\zeta_x * \partial_x)^n \simeq \sum_{m=0}^{N-1} Z_x(m)\,(\partial_x)^{n-m} \tag{8.40}$$

avec :

$$Z_x(m) = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Compte tenu de (8.39), nous obtenons donc :

$$Z_x(m) = -\frac{d_x}{\kappa_x^2}\int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} e^{-(\frac{d_x}{\kappa_x}+\alpha_x)\tau}\,\mathrm{d}\tau = a_x e^{-(\frac{d_x}{\kappa_x}+\alpha_x)m\Delta t}, \tag{8.41}$$

avec :

$$b_x = e^{-(\frac{d_x}{\kappa_x}+\alpha_x)\Delta t} \qquad \text{et} \qquad a_x = \frac{d_x}{\kappa_x(d_x+\kappa_x\alpha_x)}(b_x-1)\,. \tag{8.42}$$

D'un point de vue numérique, l'évaluation du terme de convolution écrit sous la forme (8.40) est coûteuse car elle nécessite, à chaque pas de temps, une somme sur tous les instants passés (somme sur l'indice $m$). Heureusement, en raison de la forme exponentielle simple du terme $Z_x$ dans (8.41), cette somme peut être effectuée grâce à la technique de la convolution récursive en introduisant une variable à mémoire $\psi_x$ mise à jour à chaque pas de temps, comme l'ont remarqué [97] :

$$\sum_{m=0}^{N-1} Z_x(m)\,(\partial_x)^{n-m} = \psi_x^n,$$

où l'évolution en temps de $\psi_x$ est régie par la relation :

$$\psi_x^n = b_x\psi_x^{n-1} + a_x\,(\partial_x)^n\ . \tag{8.43}$$

Cette approche est idéale d'un point de vue numérique car elle requiert un temps de calcul quasiment négligeable et nécessite le stockage d'un seul tableau supplémentaire en mémoire. En résumé, d'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la technique C-PML dans un code de différences finies existant (sans PML) est très simple. En effet, il suffit de remplacer chaque dérivée spatiale $\partial_x$ par $\frac{1}{\kappa_x}\partial_x + \psi_x$ et de mettre à jour $\psi_x$ au cours du temps grâce à (8.43). La même approche peut évidemment être utilisée pour implémenter des couches C-PML suivant les autres directions de l'espace ($y$ ou $z$). Notons qu'il n'y a aucun traitement particulier à effectuer dans les coins de la grille : les contributions $\psi_x$, $\psi_y$ et $\psi_z$ provenant des couches PML situées suivant $x$, $y$ et $z$ respectivement se somment simplement.

### 8.7.3 Résultats numériques

Nous présentons maintenant les résultats numériques obtenus en deux dimensions. Les cinq variables $v_x$, $v_y$, $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy}$ ainsi que les variables à mémoire implémentant la convolution récursive sont discrétisées selon la grille en quinconce classique de [100] et [130] représentée sur la figure 8.3.

On considère un modèle homogène de 1810 m sur 6410 m représentant un domaine beaucoup plus haut que large (tranche fine) afin de favoriser la propagation d'ondes à incidence rasante, qui constituent le cas, difficile pour la technique PML classique, que nous souhaitons tester. Ce modèle est discrétisé par un maillage comprenant 181 points sur 641 points. Le pas de discrétisation spatiale est uniforme dans les deux directions et vaut $\Delta x = \Delta y = 10$ m. Le milieu est homogène et possède une vitesse des ondes de compression $V_p = 3300$ m.s$^{-1}$, une vitesse des ondes de cisaillement $V_s = V_p/\sqrt{3} \simeq 1905,2$ m.s$^{-1}$ (c'est-à-dire que le coefficient de Poisson est égal à 0,25) et une densité $\rho = 2800$ kg.m$^{-3}$. Comme l'algorithme d'intégration en temps repose sur un schéma explicite, le pas de temps $\Delta t$ doit vérifier la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy [45] :

$$V_p \Delta t \leq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} .$$

Dans le cas où $\Delta x = \Delta y$ on a donc $\frac{V_p \Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{1/D}$, où $D$ est la dimension spatiale du problème, c'est-à-dire qu'en dimension $D = 2$ le nombre de Courant maximum théorique est égal à $1/\sqrt{2} \simeq 0,707$. On choisit $\Delta t = 2$ millisecondes, ce qui correspond à un nombre de Courant égal à 0,66. On effectue une simulation sur 2 000 pas de temps, soit une durée totale de 4 secondes.

La source est un vecteur vitesse ponctuel orienté à 135° situé en $x = 1600$ m et $y = 4280$ m. Sa variation en temps est décrite par la dérivée première d'une gaussienne de fréquence dominante $f_0 = 7$ Hz décalée de $t_0 = 1.2/f_0 = 0,17$ seconde par rapport au temps $t = 0$ afin d'avoir des conditions initiales nulles. On enregistre l'évolution au cours du temps des deux composantes du vecteur vitesse en trois points du milieu ($x_1 = 800$ m, $y_1 = 2300$ m), ($x_2 = 1500$ m, $y_2 = 2300$ m) et ($x_3 = 1600$ m, $y_3 = 300$ m).

Des couches absorbantes sont implémentées sur les quatre côtés du modèle. Elles ont une épaisseur de 10 points de grille. En suivant les travaux de [63] et [43], on choisit pour le coefficient d'amortissement dans la PML un profil de la forme $d_x(x) = d_0(\frac{x}{L})^N$ suivant l'axe $x$ et $d_y(y) = d_0(\frac{y}{L})^N$ suivant l'axe $y$, où $L$ est l'épaisseur de la couche absorbante, $N = 2$ et $d_0 = -\frac{(N+1)V_p \log(R_c)}{2L} \simeq 341,9$, $R_c$ étant le coefficient de réflexion théorique désiré, choisi ici égal à 0,1 %. Comme dans [114], nous choisissons de faire varier $\alpha_x$ et $\alpha_y$ de façon linéaire dans leur couche PML respective entre une valeur maximum $\alpha_{\max}$ à l'entrée de la PML et zéro à son sommet. Comme dans [57], nous prenons $\alpha_{\max} = \pi f_0$, où $f_0$ est la fréquence dominante de la source définie plus haut. La variable $\kappa$ a été introduite dans [114] essentiellement pour atténuer les ondes évanescentes en électromagnétisme. Or, nos nombreux tests numériques nous ont montré qu'en élastodynamique elle ne semble pas jouer un grand rôle. Nous la supprimons donc ici en choisissant $\kappa_x = \kappa_y = 1$. Sur les bords extérieurs de la couche au sommet de la PML, on impose une condition de Dirichlet sur le vecteur vitesse ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pour tout $t$). Notons qu'il faut prendre garde à bien définir les coefficients $a_x$, $b_x$, $a_y$ et $b_y$ qui régissent l'évolution des variables à mémoire (équation (8.42)) à la bonne position dans la grille en quinconce de la figure 8.3. Les coefficients $a_x$ et $b_x$ doivent être définis au niveau de la maille pour les variables à mémoire $\psi_x$ agissant sur $v_x$ et $\sigma_{xy}$ mais au niveau de la demi-maille pour celles agissant sur $v_y$, $\sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy}$. De même, $a_y$ et $b_y$ doivent être définis au niveau de la maille pour les variables à mémoire $\psi_y$ agissant sur $v_x$, $\sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy}$ mais au niveau de la demi-maille pour celles agissant sur $v_y$ et $\sigma_{xy}$. Notons également que dans les coins de la grille les contributions provenant des termes dans lesquels apparaissent $d_x$ et $d_y$ s'additionnent simplement. Ainsi, dans la formulation C-PML, les coins sont traités naturellement sans aucune modification du code de calcul.

La figure 8.4 représente les instantanés de propagation de la composante $v_y$ du vecteur vitesse à six pas de temps différents pour une simulation avec C-PML. Aucune onde parasite d'amplitude significative n'est visible, même à incidence rasante. La figure 8.5 représente l'évolution en temps aux trois points d'enregistrement des deux composantes du vecteur vitesse des résultats numériques avec C-PML, ainsi que leur comparaison à la solution analytique du problème. Au niveau du premier récepteur, relativement loin de l'entrée de la couche PML et à incidente non rasante, l'accord est quasiment parfait. Au niveau du second récepteur, à incidence rasante et assez proche de l'entrée de la couche PML, l'accord reste très bon. Au niveau du troisième récepteur, dans le cas difficile d'une incidence très rasante, d'une longue distance de propagation accumulant donc de la dispersion numérique, et d'un récepteur situé très proche de l'entrée de la couche PML (à exactement 10 points de grille de celle-ci), l'accord reste très satisfaisant, ce qui souligne l'excellente performance de la condition C-PML.

Nous étudions maintenant la décroissance de l'énergie dans le maillage afin de vérifier l'efficacité du modèle C-PML discret, notamment à incidence rasante. Pour cela, nous représentons sur la figure 8.6 la décroissance au cours du temps de l'énergie totale $E$ :

$$E = \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,,$$

dans l'ensemble du modèle (c'est-à-dire dans le milieu ainsi que dans les quatre couches PML) pour la simulation presentée sur la figure 8.4. Nous observons qu'entre 0 s et 0,2 s environ, la source injecte de l'energie dans le milieu. Ensuite, dans un premier temps, l'énergie transportée par les ondes $P$, qui sont les plus rapides, est absorbée dans les couches PML. Dans un second temps, autour d'environ 2,5 s, les ondes $S$, qui sont les plus lentes, sont absorbées à leur tour. À partir d'environ 2,5 s, il ne reste plus d'énergie dans le modele visible à cette echelle. Cela illustre l'efficacité de la technique C-PML, y compris à incidence rasante.

Il nous paraît également intéressant d'étudier la question de la stabilité du modèle C-PML aux temps longs. En effet, nous savons que dans de nombreux modèles PML, par exemple dans le cas des équations de Maxwell, des instabilités faibles ou fortes peuvent se développer au cours du temps (voir par exemple [3, 21, 74, 23]). Afin d'étudier cette question d'un point de vue numérique, nous répétons sur la figure 8.7, l'expérience de la figure 8.4 25 fois à la suite, c'est-à-dire que nous faisons durer la simulation pendant 50 000 pas de temps au lieu de 2 000 et que nous injectons la même source d'énergie toutes les 4 secondes. Nous obtenons une figure qui ressemble à la figure 8.6 répétée 25 fois. Le modele C-PML discret est donc très stable car, même en laissant la simulation se dérouler pendant 50 000 pas de temps, nous n'observons pas d'instabilités en train de se développer. Le même test effectué sur 100 000 pas de temps (non présenté ici) nous a donné le même résultat.

Afin de rendre encore plus difficile le test numérique d'une onde voyageant à incidence rasante le long de couches PML dans une grille allongée, nous réduisons maintenant la taille de la grille dans la direction horizontale à 81 points au lieu de 181 points, en gardant le pas de grille inchangé. Ainsi, nous réduisons la taille du modèle physique dans la même proportion que la grille et nous étudions une tranche extrêmement fine environ huit fois plus haute que large dans laquelle deux des bords du modèle au lieu d'un sont maintenant susceptibles de contaminer la solution numérique par des réflexions parasites. Les autres paramètres de la simulation demeurent inchangés. La figure 8.8 représente les instantanés de propagation de la composante $v_y$ du vecteur vitesse aux mêmes six pas de temps que ci-dessus, toujours avec C-PML implémenté sur les quatre côtés. De nouveau, aucune onde parasite d'amplitude significative n'est visible, même à incidence rasante. La figure 8.9 représente l'évolution en temps des deux composantes du vecteur vitesse aux deux derniers récepteurs et leur comparaison aux résultats obtenus dans la tranche fine ci-dessus. Les résultats restent très satisfaisants et pratiquement inchangés par rapport au cas de la tranche plus épaisse, ce qui souligne l'efficacité de la condition C-PML même dans ce cas très difficile.

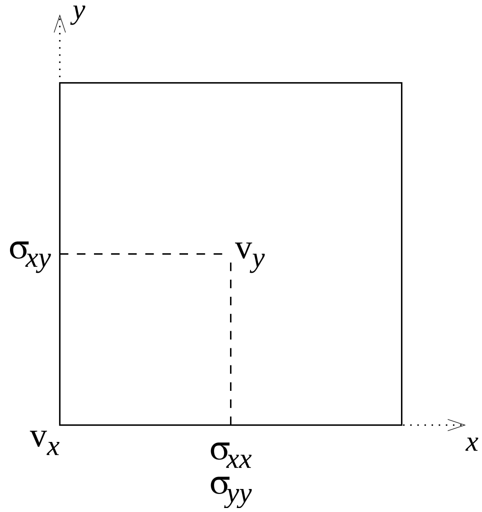



Fig. 8.3 – Grille bidimensionnelle de différences finies en quinconce en espace de [100] et [130] utilisée classiquement pour discrétiser les équations de l'élastodynamique.

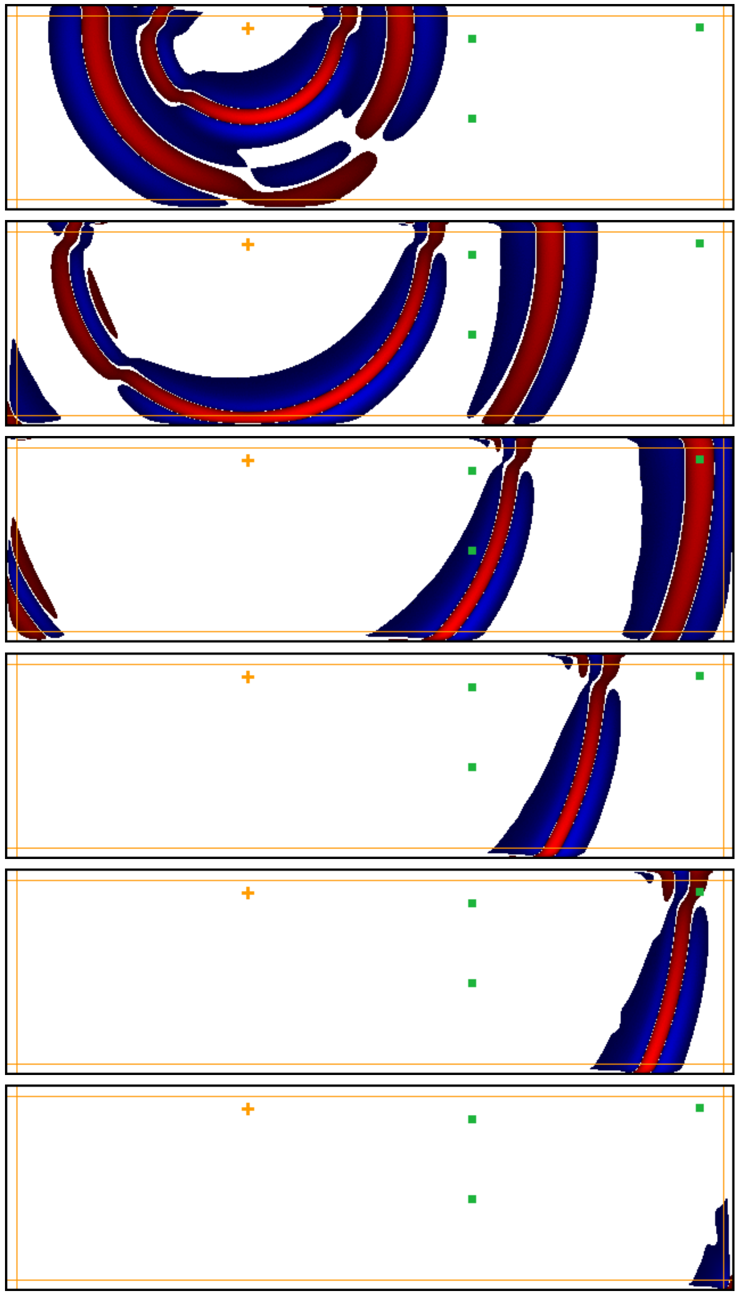


FIG. 8.4 – Instantanés de propagation de la composante $v_y$ du vecteur vitesse 2D pour un modèle correspondant à une tranche fine avec des conditions C-PML implémentées sur les quatre côtés, aux pas de temps 300 (en haut), 500, 700, 900, 1 100 et 1 300 (en bas). Nous représentons en rouge ou bleu (suivant qu'elle est positive ou négative) la composante en chaque point de la grille lorsqu'elle a une amplitude supérieure à un seuil de 1 % du maximum de l'instantané de propagation concerné. Pour plus de clarté, les faibles amplitudes ont été artificiellement rehaussées de manière non linéaire. La croix orange indique la position de la source et les carrés verts indiquent la position des récepteurs auxquels sont enregistrés les sismogrammes représentés sur la Figure 8.5. Les quatre lignes verticales ou horizontales orange représentent le bord de chacune des couches PML. Aucune onde parasite d'amplitude significative n'est visible, même à incidence rasante. Les instantanés ont été tournés de 90 degrés pour des raisons de mise en page.

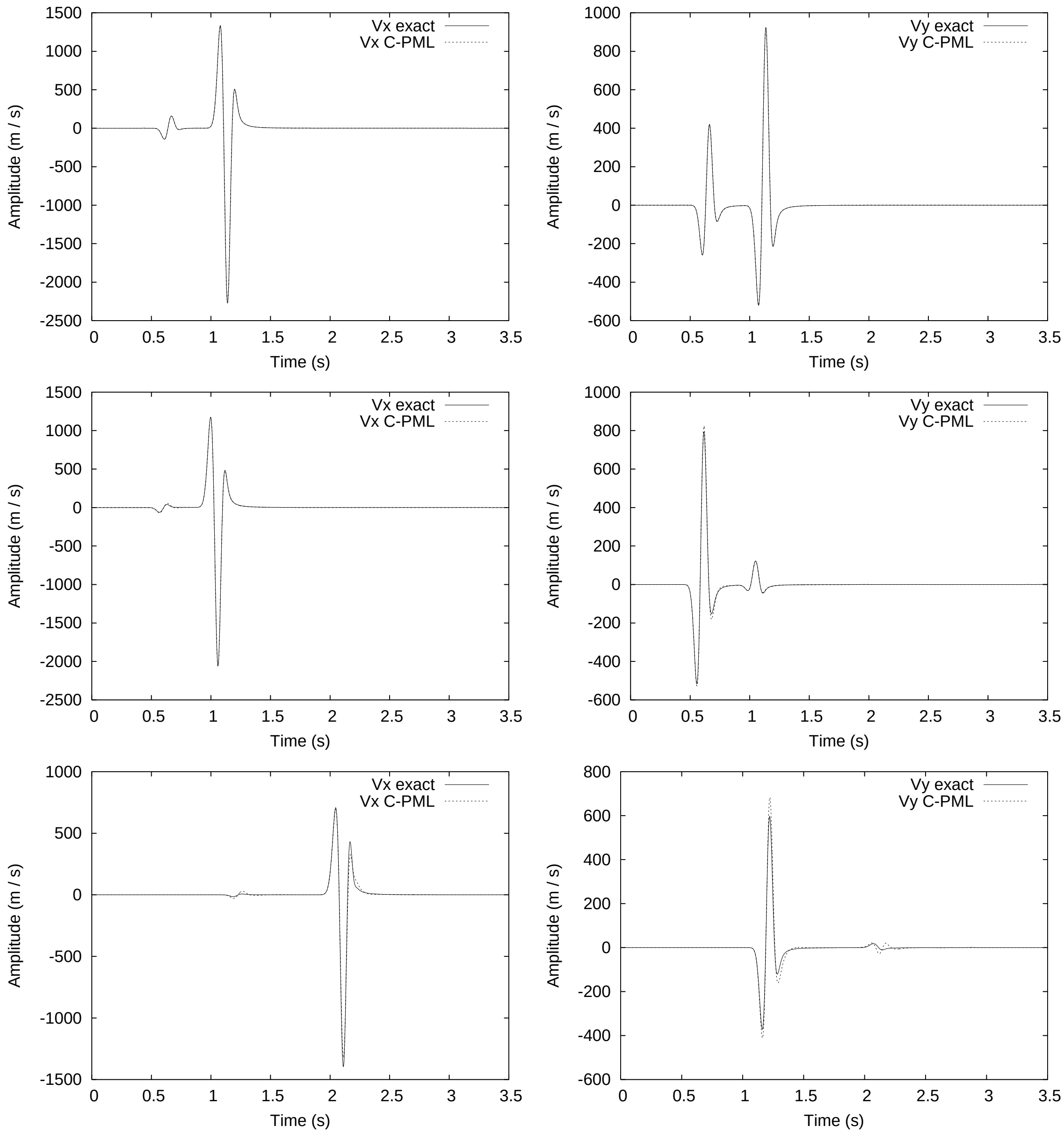



FIG. 8.5 – Évolution en temps des deux composantes du vecteur vitesse 2D ($v_x$ à gauche, $v_y$ à droite) au premier récepteur (en haut), au second récepteur (au milieu) et au troisième récepteur (en bas) de la solution exacte du problème (trait plein) et de la solution numérique avec C-PML (trait pointillé). Au niveau du premier récepteur, relativement loin de l'entrée de la couche PML et à incidence non rasante, l'accord est quasiment parfait. Au niveau du second récepteur, à incidence rasante et assez proche de l'entrée de la couche PML, l'accord reste très bon. Au niveau du troisième récepteur, dans le cas difficile d'une incidence très rasante, d'une longue distance de propagation accumulant donc de la dispersion numérique, et d'un récepteur situé très proche de l'entrée de la couche PML (à exactement 10 points de grille de celle-ci), l'accord reste très satisfaisant, ce qui souligne la très bonne performance de la condition C-PML.

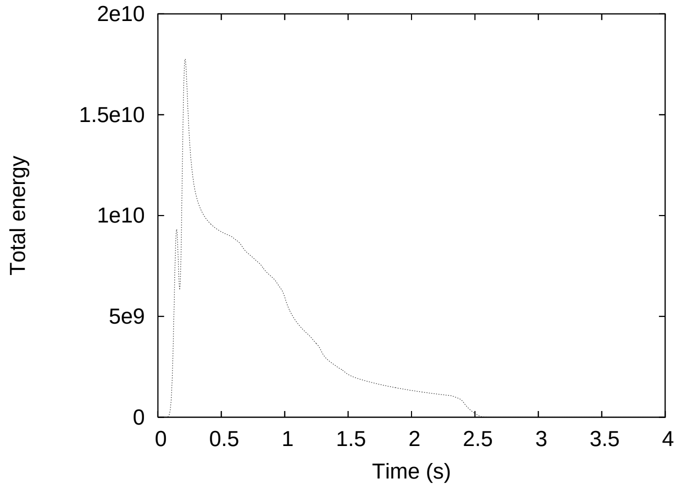



FIG. 8.6 – Décroissance de l'énergie totale au cours du temps dans l'ensemble du modèle (c'est-à-dire dans le milieu ainsi que dans les quatre couches PML) pour la simulation pr ésentée sur la figure 8.4. On observe qu'entre 0 s et 0,2 s environ la source injecte de l'énergie dans le milieu. Ensuite, dans un premier temps, l'énergie transportée par les ondes $P$, qui sont les plus rapides, est absorbée dans les couches PML. Dans un second temps, autour d'environ 2,5 s, les ondes $S$, qui sont les plus lentes, sont absorbées à leur tour. À partir d'environ 2,5 s, il ne reste plus d'énergie dans le modèle visible à cette échelle. Cela illustre l'efficacité de la technique C-PML, y compris à incidence rasante.

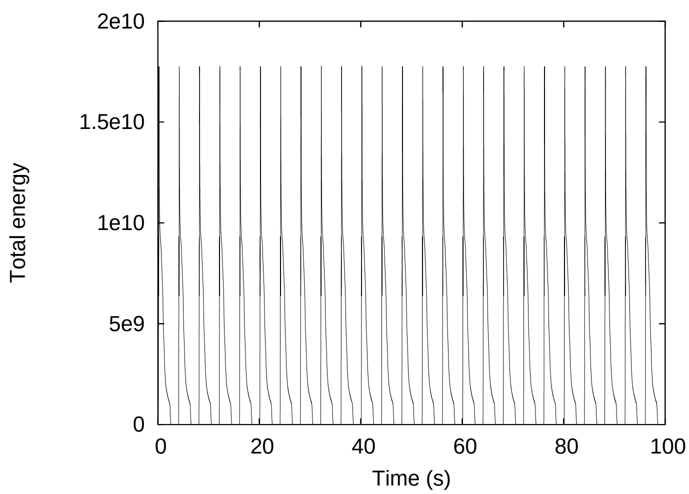



FIG. 8.7 – Afin d'étudier la stabilité du modèle C-PML aux temps longs, nous répétons 25 fois à la suite l'expérience de la figure 8.4, c'est-à-dire que nous faisons durer la simulation pendant 50 000 pas de temps au lieu de 2 000 et que nous injectons la même source d'énergie toutes les 4 secondes. Nous obtenons une figure qui ressemble à la figure 8.6 répetée 25 fois. Le modèle C-PML discret est donc très stable car, même en laissant la simulation se dérouler pendant 50 000 pas de temps, nous n'observons pas d'instabilités en train de se développer.

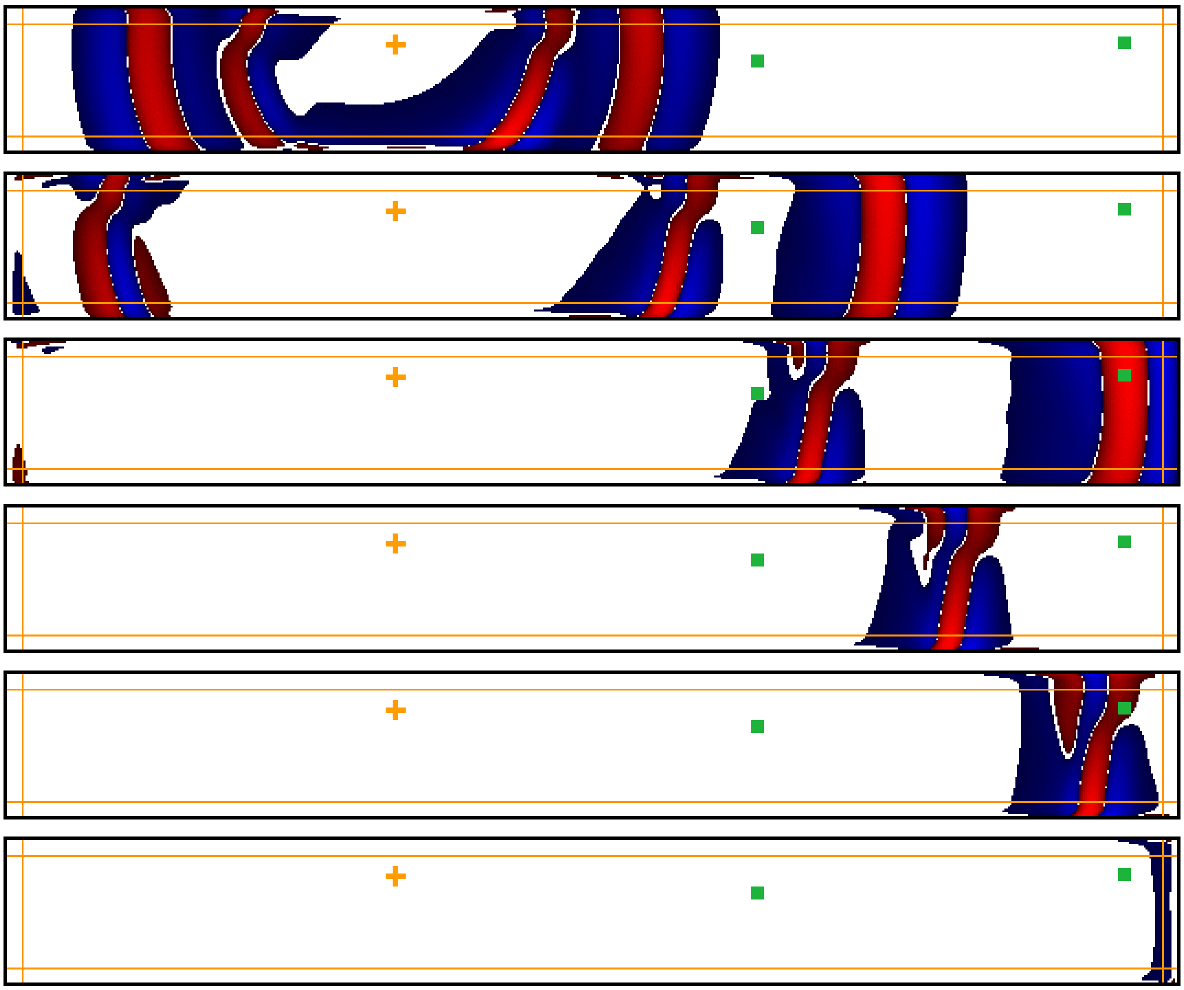


FIG. 8.8 – Instantanés de propagation de la composante $v_y$ du vecteur vitesse 2D pour un modèle correspondant à une tranche très fine avec des conditions C-PML implémentées sur les quatre côtés, aux pas de temps 300 (en haut), 500, 700, 900, 1 100 et 1 300 (en bas). Nous représentons en rouge ou bleu (suivant qu'elle est positive ou négative) la composante en chaque point de la grille lorsqu'elle a une amplitude supérieure à un seuil de 1 % du maximum de l'instantané de propagation concerné. Pour plus de clarté, les faibles amplitudes ont été artificiellement rehaussées de manière non linéaire. La croix orange indique la position de la source et les carrés verts indiquent la position des récepteurs enregistrant les sismogrammes représentés sur la figure 8.9. Les quatre lignes verticales ou horizontales orange représentent le bord de chacune des couches PML. De nouveau, comme dans le cas de la tranche fine de la figure 8.4, aucune onde parasite d'amplitude significative n'est visible, même à incidence rasante. Les instantanés ont été tournés de 90 degrés pour des raisons de mise en page.

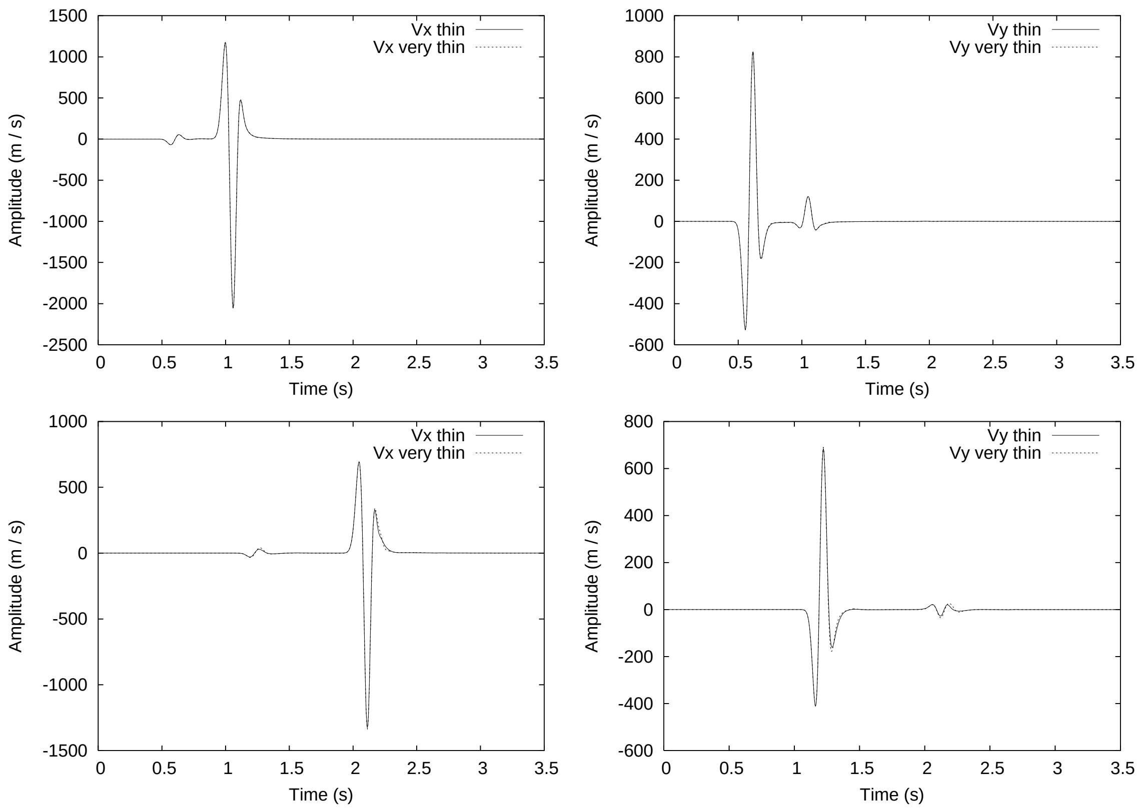



FIG. 8.9 – Évolution en temps des deux composantes du vecteur vitesse 2D ($v_x$ à gauche, $v_y$ à droite) au niveau du second (en haut) et du troisième récepteur (en bas) de la solution du problème avec C-PML pour la tranche fine (trait plein) et C-PML pour la tranche très fine (trait pointillé). Les résultats restent très satisfaisants et pratiquement inchangés, ce qui souligne l'efficacité de la condition C-PML même ce cas difficile d'une tranche très fine pratiquement huit fois plus haute que large.

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié d'un point de vue mathématique différents modèles de problèmes qui interviennent en géophysique.

La majeure partie de ce travail concerne le système des équations de Maxwell. Tout d'abord, nous avons étudié un système posé dans un milieu absorbant semi-infini. Nous montrons que le problème admet une unique solution dans un cadre hilbertien et nous construisons ensuite des conditions aux limites absorbantes adaptées au modèle considéré. En particulier, nous étudions l'effet du couplage de ce modèle avec la condition de Silver-Müller. Nous obtenons des propriétés mathématiques intéressantes : le caractère bien posé et des résultats de stabilité en temps long. Par ailleurs, à partir du système précédent, nous construisons un modèle PML 3D. La formulation fait intervenir des opérateurs pseudo-différentiels. Après avoir établi que ce modèle est bien un modèle PML, nous étudions ses propriétés mathématiques. Nous montrons que le problème est bien posé. Nous illustrons ensuite l'efficacité de ce modèle par des simulations numériques. Enfin, nous avons travaillé sur un modèle PML 2D existant pour les équations de Maxwell. Nous construisons des conditions aux limites artificielles pour ce modèle PML, puis nous étudions le caractère bien posé des modèles couplés résultants. Enfin, nous mesurons l'impact des CLA sur le comportement des champs dans la couche.

La seconde partie de ce travail concerne les équations de l'élastodynamique. Nous avons étudié les propriétés mathématiques d'un modèle PML 2D existant, puis calculé les coefficients de réflexion discrets associés au modèle. Le but de ce calcul était d'optimiser l'action de la PML par une méthode de moindres carrés. Nous avons finalement abandonné cette approche et nous avons présenté une alternative pour l'optimisation : la méthode C-PML, efficace et simple à mettre en œuvre. Cette méthode permet d'optimiser l'action de la PML, notamment à incidence rasante.

Notre travail ouvre la voie à d'autres développements, aussi bien du point de vue théorique que du point de vue pratique. Tout d'abord, nous pourrions essayer d'appliquer les techniques utilisées au chapitre 4 pour analyser le comportement en temps de la solution de modèles PML. Par ailleurs, il serait intéressant de coupler le modèle PML 3D pour les équations de Maxwell avec des conditions aux limites absorbantes. Il s'agirait, d'une part, de construire des CLA adaptées au modèle. D'autre part, il serait intéressant d'intégrer ces CLA dans le code PML que nous avons développé et d'illustrer numériquement leur effet. Enfin, nous souhaiterions étudier les propriétés mathématiques du modèle C-PML que nous avons présenté au travers de simulations numériques.

# Bibliographie


[1] S. Abarbanel, D. Gottlieb, A Mathematical Analysis of the PML Method, *Journal of Computational Physics*, 134, 1997, p. 357-363.

[2] S. Abarbanel, D. Gottlieb, On the construction and analysis of absorbing layers in CEM, *Applied Numerical Mathematics*, 27, 1998, p. 331-340.

[3] S. Abarbanel, D. Gottlieb, J. S. Hesthaven, Long Time Behavior of the Perfectly Matched Layer Equations in Computational Electromagnetics, *Journal of Scientific Computing*, 17, 2002, p. 405-422.

[4] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[5] X. Antoine, H. Barucq, Microlocal Diagonalization of Strictly Hyperbolic Pseudodifferential Systems and Application to the Design of Radiation Conditions in Electromagnetism, SIAM Journal on Applied Mathematics, 61, 2001, p. 1877-1905.

[6] R. Alford, K. Kelly, D. Boore, Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation, geophysics, 39, 1974, p. 834-842.

[7] Z. Alterman, F. C. Karal, Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 58, 1968, p. 367-398.

[8] F. Auzanneau, R. W. Ziolkowski, Étude théorique de matériaux bianisotropes synthétiques contrôlables, *J. Phys. III*, 7, 1997, p. 2405-2418.

[9] H. Bao, J. Bielak, O. Ghattas, L. F. Kallivokas, D. R. O'Hallaron, J. R. Shewchuk, J. Xu, Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 152, 1998, p. 85-102.

[10] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, controllability and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control. Optim.*, 30 , 1992, p. 1024-1064.

[11] H. Barucq, B. Hanouzet, Asymptotic behavior of solutions to Maxwell's system with absorbing Silver-Müller condition on the exterior boundary, *Asymptotic Analysis*, 15, 1997, p. 25-40.

[12] H. Barucq, F. Delaurens, B. Hanouzet, Method of Absorbing Boundary Conditions : Phenomena of Error Stabilization, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35, 1998, p. 1113-1129.

[13] H. Barucq, A new family of first-order boundary conditions for the Maxwell system : derivation, well-posedness and long-time behavior, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 82, 2002, p. 67-88.

[14] H. Barucq, M. Fontes, Mathematical aspects of the Maxwell system coupled with new 3D Perfectly Matched Layers, rapport interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau 05/18, 2005.

[15] H. Barucq, M. Fontes, Analysis of PML formulations for the Maxwell system including pseudodifferential operators : existence and uniqueness results, rapport interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau, 2006.

[16] A. Bendali, L. Halpern, Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension trois d'espace, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Serie I*, 307, 1988, p. 1011-1013.

[17] J. P. Bérenger, A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, 114, 1994, p. 185-200.

[18] J. P. Bérenger, Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, 127, 1996, p. 363-379.

[19] J. P. Bérenger, Application of the CFS PML to the Absorption of Evanescent Waves in Waveguides, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 12, 2002, p. 218-220.

[20] E. Bécache, S. Fauqueux, P. Joly, Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves, *Journal of Computational Physics*, 188, 2003, p. 399-433.

[21] E. Bécache, P. Joly, On the analysis of Bérenger's Perfectly Matched Layers for Maxwell's equations, *M2AN*, 36, 2002, p. 87-120.

[22] E. Bécache, Méthodes variationnelles, domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris IX, 2003.

[23] E. Bécache, P. G. Petropoulos, S. G. Gedney, On the Long Time Behavior of Unsplit Perfectly Matched Layers, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52, 2004, p. 1335-1342.

[24] E. Bécache, A. S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 42, 2004, p. 409-433.

[25] A. Bossavit, G. Griso, B. Miara, Modelling of periodic electromagnetic structures bianisotropic materials with memory effects, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 84, 2005, p. 819-850.

[26] M. Bouchon, The discrete wave number formulation of boundary integral equations and boundary element methods : a review with applications to the simulation of seismic wave propagation in complex geological structures, *Pure Appl. Geophys.*, 148, 1996, p. 3-20.

[27] M. Bouchon C. A. Schultz, M. Nafi Töksoz, Effect of three-dimensional topography on seismic motion, *J. Geophys. Res.*, 101, 1996, p. 5835-5846.

[28] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[29] A. Buffa, P. Ciarlet, Jr, On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I : an integration by parts formula in Lipschitz polyhedra, *Mathematical Methods. Appl. Sci.*, 24, 2001, p. 9-30.

[30] A. Buffa, M. Costabel, D. Sheen, On traces for $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276, 2002 p. 845-867.

[31] A. Buffa, M. Costabel, C. Schwab : Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains, *Numer. Math.* 92, 2002, p. 679-710.

[32] J. M. Carcione, P. J. Wang, A Chebyshev Collocation Method for the Wave Equation in Generalized Coordinates, *Comp. Fluid Dyn. J.*, 2, 1993, p. 269-290.

[33] J. M. Carcione, The wave equation in generalized coordinates, *Geophysics*, 59, 1994, p. 1911-1919.

[34] R. Chandra, R. Menon, L. Dagum, D. Kohr, D. Maydan and J. McDonald, Parallel Programming in OpenMP, Morgan Kaufmann, 2000.

[35] E. Chaljub, A. Tarantola, Sensitivity of SS precursors to topography on the upper-mantle 660-km discontinuity, *Geophys. Res. Lett.*, 24, 1997, p. 2613-2616.

[36] E. Chaljub, Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale, Université Paris VII, Paris, France, 2000.

[37] E. Chaljub, Y. Capdeville, J. P. Vilotte, Solving Elastodynamics in a Fluid-Solid Heterogeneous Sphere : a Parallel Spectral Element Approximation on Non-Conforming Grids, *J. Comput. Phys.*, 187, 2003, p. 457-491.

[38] E. Chaljub, B. Valette, Spectral element modelling of three-dimensional wave propagation in a self-gravitating Earth with an arbitrarily stratified outer core, *Geophys. J. Int.*, 158, 2004, p. 131-141.

[39] W. C. Chew, W. H. Weedon, A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stetched coordinates, *Micro. Opt. Tech. Lett.*, 7, 1994, p. 599-604.

[40] A. J. Chorin Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, 22, 1968, p. 745-762.

[41] G. Cohen, P. Joly, N. Tordjman, Construction and analysis of higher-order finite elements with mass lumping for the wave equation, Proceedings of the second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation, SIAM, Philadephia, PA, 1993, p. 152-160.

[42] F. Collino, P. B. Monk, Optimizing the perfectly matched layer, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164, 1998, p. 157-171

[43] F. Collino, C. Tsogka, Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media *Geophysics*, 66, 2001, p. 294-307.

[44] F. Collino, Perfectly Matched Absorbing layers for the Paraxial Equations, *Journal of Computational Physics*, 131, 1997, p. 164-180.

[45] R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 100, 1928, p. 32-74.

[46] R. Dautray, J-L. Lions, Analyse mathématique pour les sciences et les techniques, vol.1, CEA, 1988.

[47] R. Dautray, J-L. Lions, Analyse mathématique pour les sciences et les techniques, vol. 5, CEA, 1988.

[48] R. Dautray, J-L. Lions, Analyse mathématique pour les sciences et les techniques, vol.8, CEA, 1988.

[49] S. M. Day, Efficient simulation of constant $Q$ using coarse-grained memory variables, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 88, 2002, p. 1051-1062.

[50] M. Käser, M. Dumbser, An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes I : The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms, *Geophys. J. Int.*, 2006, sous presse.

[51] M. Eller, J. E. Lagnese, S. Nicaise, Stabilisation of heteregeneous Maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedbacks, *Electronic Journal of Differential Equations*, 21, 2002, p. 1-26.

[52] B. Engquist, A. Majda, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Mathematics of Computation*, 31, 1977, p. 629-651.

[53] B. Engquist, A. Majda, Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32, 1979, p. 314-358.

[54] E. Faccioli, F. Maggio, R. Paolucci, A. Quarteroni, 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method, *J. Seismol.*, 1, 1997, p. 237-251.

[55] J.-P. Faroux, J. Renault, Électromagnétisme 2, Dunod, Paris, 1998.

[56] X. Feng, Absorbing boundary conditions for electromagnetic wave propagation, *Mathematics of Computation*, 68, 1999, p. 145-168.

[57] G. Festa, J-P. Vilotte, The Newmark scheme as a Velocity-Stress Time-Staggering : an efficient PML for spectral element simulations, *Geophys. J. Int.*, 161, 2005, p. 789-712.

[58] C. M. da Fonseca, J. Petronilho, Explicit inverses of some tridiagonal matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 325, 2001, p. 7-21.

[59] A. Frankel, Three-dimensional simulations of ground motions in the San Bernardino valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault, bssa, 83, 1993, p. 1020-1041.

[60] A. Frankel, J. Vidale, A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara valley, California, from the Loma Prieta aftershock, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 1992, p. 2045-2074.

[61] T. Furumura, B. L. N. Kennett, M. Furumura, Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous whole Earth models using the pseudospectral method, *Geophys. J. Int.*, 135, 1998, p. 845-860.

[62] M. Furumura, B. L. N. Kennett, T. Furumura, Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous Earth models–II. The influence of upper mantle heterogeneity, *Geophys. J. Int.*, 139, 1999, p. 623-644.

[63] S. D. Gedney, The Perfectly Matched Layer absorbing medium, Advances in Computational Electrodynamics, in : the Finite-Difference Time-Domain method, Artech House, Boston, 1998.

[64] V. Girault, P-A. Raviart, Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[65] D. Givoli, Non-reflecting boundary conditions, *Journal of Computational Physics*, 94, 1991, p. 1-29.

[66] X. Gourdon, Les maths en tête, Mathématiques pour M', Analyse, Éditions Ellipses, Paris, 1994.

[67] W. Gropp, E. Lusk, A. Skjellum, Using MPI, portable parallel programming with the Message-Passing Interface, MIT Press, Cambridge, USA, 1994.

[68] T. Hagstrom, Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Acta Numerica*, 8, 1999, p. 47-106.

[69] L. Halpern, Étude de conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires, Thèse de Doctorat, Université Paris IV, 1980.

[70] L. Halpern, J. Rauch, Absorbing boundary conditions for diffusion equations, *Numer. Math.*, 71, 1995, p. 185-224.

[71] R. L. Higdon, Initial boundary value problems for linear hyperbolic systems, *SIAM Review*, 28(2), 1986, p. 177-217.

[72] F. Q. Hu, On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer, *Journal of Computational Physics*, 129, 1996, p. 201-219.

[73] F. Q. Hu, Development of PML Absorbing Boundary Condition for Computational Aeroacoustics : A Progress Review, *Computers anf Fluids*, 2006, sous presse.

[74] P. Joly, Méthodes de couches parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes en régime transitoire, communication orale, Congrès d'Analyse Numérique, 2003.

[75] P. Joly, B. Mercier, Une nouvelle condition transparente d'ordre deux pour les équations de Maxwell en dimension trois, *Rapport INRIA*, 1047, 1989.

[76] H. Kawase, Time-domain response of a semi-circular canyon for incident $SV$, $P$ and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 78, 1988, p. 1415-1437.

[77] K. R. Kelly, R. W. Ward, S. Treitel, R. M. Alford, Synthetic seismograms : a Finite Difference approach, geophysics, 41, 1976, p. 2-27.

[78] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[79] D. Komatitsch, Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène, Institut de Physique du Globe, Paris, France, 1997.

[80] D. Komatitsch, J. P. Vilotte, The spectral-element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88, 1998, p. 368-392.

[81] D. Komatitsch, J. Tromp, Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, 139, 1999, p. 806-822.

[82] D. Komatitsch, J. Tromp, Spectral-Element Simulations of Global Seismic Wave Propagation-I. Validation, *Geophys. J. Int.*, 149, 2002, p. 390-412.

[83] D. Komatitsch, J. Tromp, Spectral-Element Simulations of Global Seismic Wave Propagation-II. 3-D Models, Oceans, Rotation, and Self-Gravitation, *Geophys. J. Int.*, 150, 2002, p. 303-318.

[84] D. Komatitsch, J. Ritsema, J. Tromp, The Spectral-Element Method, Beowulf Computing, and Global Seismology, *Science*, 298, 2002, p. 1737-1742.

[85] D. Komatitsch, J. Tromp, A Perfectly Matched Layer absorbing condition for the second-order elastic wave equation, *Geophys. J. Int.*, 154, 2003, p. 146-153, 2003.

[86] D. Komatitsch, S. Tsuboi, C. Ji, J. Tromp, A 14.6 billion degrees of freedom, 5 teraflops, 2.5 terabyte earthquake simulation on the Earth Simulator, *Proceedings of the ACM/IEEE Supercomputing SC'2003 conference*, 2003.

[87] D. Komatitsch, Q. Liu, J. Tromp, P. Süss, C. Stidham , J. H. Shaw, Simulations of Ground Motion in the Los Angeles Basin based upon the Spectral-Element Method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94, 2004, p. 187-206.

[88] V. Komornik, Stabilisation frontière des équations de Maxwell, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série I*, 318, 1994, p. 535-540.

[89] H.-O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23, 1970, p. 277-298.

[90] H.-O. Kreiss, J. Lorenz, Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations, *Pure Appl. Math.*, 136, 1989.

[91] M. Kuzuoglu, R. Mittra, Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched absorbers, *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, 6, 1996, p. 447-449.

[92] H. Igel, M. Weber, SH-wave propagation in the whole mantle using high-order finite differences, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 1995, p. 731-734.

[93] H. Igel, M. Weber, P-SV wave propagation in the whole mantle using high-order finite differences : application to lowermost mantle structure, *Geophys. Res. Lett.*, 23, 1996, p. 415-418.

[94] G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Gauthier-Villars, Paris, 1852.

[95] L. Landau, E. Lifschitz, Théorie des champs, Éditions Mir, Moscou, 1970.

[96] Q. Liu, J. Polet, D. Komatitsch, J. Tromp, Spectral-element moment-tensor inversions for earthquakes in Southern California, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94, 2004, p. 1748-1761.

[97] R. Luebbers, F. Hunsberger, FDTD for Nth-Order Dispersive Media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40, 1992, p. 1297-1301.

[98] J. L. Lions, J. Métral, O. Vacus, Well-posed absorbing layers for hyperbolic problems, Numerische Mathematik, 92, 2002, p. 535-562.

[99] J. Lysmer, L. A. Drake, A finite element method for seismology, Methods in Computational Physics, Academic Press, New York, USA, 1972.

[100] R. Madariaga, Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 65, 1976, p. 163-182.

[101] Y. Maday, A. T. Patera, Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, State of the art survey in computational mechanics, 1989, p. 71-343.

[102] K. J. Marfurt, Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar wave equation, *Geophysics*, 49, 1984, p. 533-549.

[103] J. Métral, O. Vacus, Well-posedness of the Cauchy problem associated with Bérenger's system, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Serie I*, 328, 1999, p. 847-852.

[104] K. B. Olsen, Site amplification in the Los Angeles basin from three-dimensional modeling of ground motion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 90, 2000, p. 77-94.

[105] K. B. Olsen, R. J. Archuleta, 3-D simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 86, 1996, p. 575-596.

[106] A. T. Patera, A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion, *J. Comput. Phys.*, 54, 1984, p. 468-488.

[107] A. Pitarka and K. Irikura and T. Iwata and H. Sekiguchi, Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88, 1998, p. 428-440.

[108] P. G. Petropoulos, L. Zhao, A. C. Cangellaris, A Reflectionless Sponge Layer Absorbing Boundary Condition for the Solution of Maxwell's Equations with High-Order Staggered Finite-Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*, 139, 1998, p. 184-208.

[109] L. Paquet, Problèmes mixtes pour le système de Maxwell, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 4, 1982, p. 103-141.

[110] A. Pazy, Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[111] K. D. Phung, Controllability and stabilization of electromagnetic waves, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5, 2000, p. 87-137.

[112] E. Priolo, J. M. Carcione, G. Seriani, Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques, *J. Acoust. Soc. Am.*, 95, 1994, p. 681-693.

[113] A. N. Rahmouni, Des modèles PML bien posés pour divers problèmes hyperboliques, Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, 2000.

[114] J. A. Roden, S. D. Gedney, Convolution PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*, 27, 2000, p. 334-339.

[115] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee, J. F. Lee, A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43, 1995, p. 1460-1463.

[116] F. J. Sánchez-Sesma, M. Campillo, Diffraction of $P$, $SV$ and Rayleigh waves by topographicfeatures : a boundary integral formulation, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 81, 1991, p. 2234-2253.

[117] G. Schmidt, Spectral and scattering theory of Maxwell's equations in an exterior domain, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 28, 1968, p. 284-322.

[118] G. Seriani, 3-D large-scale wave propagation modeling by a spectral element method on a Cray T3E multiprocessor, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 164, 1998, p. 235-247.

[119] M. Sesques, Conditions aux limites artificielles pour le système de Maxwell, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, France, 1990.

[120] M. E. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, USA, 1981.

[121] M. Taylor, J. Tribbia, M. Iskandarani, The spectral element method for the shallow water equation on the sphere, *J. Comput. Phys.*, 130, 1997, p. 92-108.

[122] L. Tartar, On the characterization of traces of a Sobolev space used for Maxwell's equations, Proceedings of a meeting held in Bordeaux in honour of Michel Artola, 1997.

[123] E. Tessmer, D. Kosloff, 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebyshev spectral method, *Geophysics*, 59, 1994, p. 464-473.

[124] T. Toshinawa, T. Ohmachi, Love-wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 1992, p. 1661-1677.

[125] F. Treves, Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, New York, USA, 1975.

[126] F. Treves, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators Vol. 2, Plenum Press, New York, 1980.

[127] E. Turkel, High-order methods, in Advances in Computational Electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain method, A. Taflove editor, Artech House, Boston, USA, 1998, p. 63-109.

[128] E. Turkel, A. Yefet, Absorbing PML Boundary Layers for Wave-Like Equations, *Appl. Numer. Math.*, 27, 1998, p. 533-557.

[129] R. Usmani, Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix, *Linear Algebra and its Applications*, 212/213, 1994, p. 413-414.

[130] J. Virieux, P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, 51, 1986, p. 889-901.

[131] K. Yamamoto, Singularities of solutions to the boundary value problem for elastic and Maxwell's equations, *Japan J. Math.*, 14, 1988, p. 119-163.

[132] K. S. Yee, Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14, 1966, p. 302-307.

[133] A. Yefet, E. Turkel, Fourth-order compact implicit method for the Maxwell equations with discontinuous coefficients, *Applied Numerical Mathematics : Transactions of IMACS*, 33, 2000, p. 125-134.

[134] X. Zeng, Finite difference modeling of viscoelastic wave propagation in a generally heterogeneous medium in the time domain, and a dissection method in the frequency domain, PhD thesis, University of Toronto, Canada, 1996.

[135] L. Zhao, A. C. Cangellaris, GT-PML : Generalized Theory of Perfectly Matched Layers and Its Application to the Reflectionless Truncation of Finite-Difference Time-Domain Grids, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 44, 1996, p. 2555-2563.

[136] D. W. Zingg, H. Lomax, H. Jurgens, High-Accuracy Finite-Difference Schemes for Linear Wave Propagation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17, 1996, p. 328-346.

[137] D. W. Zingg, Comparison of High-Accuracy Finite-Difference Methods for Linear Wave Propagation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22, 2000, p. 476-502.